



Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences
Département de Physique
Oujda



Filières : SMIA/ MIP S2 2021-2022/ 2022-2023/ 2023-2024/

Recueil d'exercices

Thermodynamique

Réalisé par :
M. HAMAL

Travaux dirigés de thermodynamique
Série 1

Exercice 1

Soit f une fonction des variables réelles x et y définie par $f(x, y) = x^2y - y^3$.

1. Calculer $f(\alpha x, \alpha y)$ où α est un nombre réel.
2. Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f .
3. Calculer l'expression : $x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + y \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$.
4. Montrer que $df(x, y)$ est différentielle totale exacte.

Exercice 2

On considère la forme différentielle, $\delta w = y \sin x \, dx - \cos x \, dy$

Montrer que cette forme différentielle est totale exacte et déterminer sa primitive.

Exercice 3

On gonfle à température constante un pneu de volume $V = 50$ litres au moyen d'air comprimé contenu dans un réservoir R de volume $V_0 = 80$ litres où la pression initiale est $P_0 = 15 P_{atm}$ avec $P_{atm} = 1$ bar. La pression initiale du pneu est considérée comme nulle et sa pression finale est $P = 2.6 P_{atm}$. L'air sera considéré comme un gaz parfait.

1. Calculer la pression P_1 dans le réservoir à la fin du gonflage;
2. Combien de pneus peut-on gonfler de cette façon.
3. Un pneu est gonflé sous la pression $P_1 = 2 \text{ bars}$ à la température $T_1 = 27^\circ\text{C}$. Après avoir roulé sur autoroute, elle s'échauffe jusqu'à la température $T_2 = 57^\circ\text{C}$. En admettant que le volume du pneu reste un peu près constante.
 - (a) Calculer la pression de l'air dans le pneu;
 - (b) Si la résistance maximale du pneu est 6 bars, à quelle température risque-t-il d'exploser?

Exercice 4

Une chaise pesant 50 N repose sur le sol par 4 pieds dont les surfaces de contact sont de 3 cm^2 .

Calculer la pression subie par le sol lorsque la chaise porte une personne de 800 N .

Exercice 5

Pression P , température T et volume V représentent les variables d'état du système étudié. Elles sont reliées par une équation d'état $f(P, V, T) = 0$.

1. Trouver la relation liant les dérivées partielles des paramètres d'état P , V et T ;
2. Trouver la relation liant les coefficients thermoélastiques α , β et χ_T définis par:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad \text{et} \quad \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

3. Calculer l'accroissement de pression subi par une masse donnée de mercure lorsqu'on la chauffe de 0 °C à 1 °C à volume constante, en supposant $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ indépendant de T .

Application numérique: $\alpha = 18.10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T = 3.10^{-6} \text{ atm}^{-1}$.

Exercice 6

Calculer les coefficients thermoélastiques α , β et χ_T :

1. Pour le gaz parfait;
2. Pour le gaz d'équation d'état $P(V - nb) = nRT$;
3. Pour le gaz de Van der Waals d'équation d'état

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

4. Déterminer le coefficient β d'un tel gaz et le comparer à celui d'un gaz parfait.

Exercice 7

Soit une tranche d'air comprise entre z et $z + dz$, de section S et en équilibre mécanique.

1. Établir la relation différentielle de la statique des fluides: $dP = -\rho g dz$;
2. Quelle masse molaire convient-il d'attribuer à l'air, sachant que ce dernier est assimilé d'un gaz parfait formé de 21 % d'oxygène et de 79 % d'azote? On donne $M_{O_2} = 32 \text{ g}$ et $M_{N_2} = 28 \text{ g}$.
3. Calculer la pression au sommet d'une montagne se trouvant à une altitude $z = 800 \text{ m}$. On suppose que la température de l'air est uniforme et est égale à 300 K. La pression à $z = 0$ est $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

Correction de la série 1 de thermodynamique

Exercice 1

On a: $f(x, y) = x^2y - y^3$.

1. Calcul de $f(\alpha x, \alpha y)$:

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2(\alpha y) - (\alpha y)^3 = \alpha^3(x^2y - y^3) = \alpha^3 f(x, y)$$

2. Calcul de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = ?$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = ?$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial(x^2y - y^3)}{\partial x}\right)_y = 2xy$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial(x^2y - y^3)}{\partial y}\right)_x = x^2 - 3y^2$$

3. Calcul de $x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = ?$:

$$x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x \cdot 2xy + y \cdot (x^2 - 3y^2) = 3x^2y - 3y^3 = 3 \cdot f(x, y)$$

4. Montrer que $df(x, y)$ est différentielle totale exacte:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 3y^2)\right) = 2x$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} (2xy)\right) = 2x$$

On déduire que:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = 2x$$

Donc df est différentielle totale exacte (D.T.E).

Exercice 2

On a: $\delta w = y \sin x dx - \cos x dy$.

1. Montrer que cette forme différentielle est totale exacte:

Posons $A(x, y) = y \sin x$ et $B(x, y) = -\cos x$

Alors $\delta w = A(x, y)dx + B(x, y)dy$

On a:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = \sin x \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y = \sin x$$

Par conséquent:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y = \sin x$$

Donc δw est différentielle totale exacte (D.T.E). Il existe donc une fonction f telle que:

$$df = A(x, y)dx + B(x, y)dy = y \sin x dx - \cos x dy$$

Primitive : Recherche de la fonction f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = y \sin x \Rightarrow f(x, y) = \int_{y=Cte} y \sin x dx = y \cdot \int \sin x dx = -y \cos x + \psi(y)$$

Donc:

$$f(x, y) = -y \cos x + \psi(y) \quad (1)$$

On a:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -\cos x$$

En dérivant l'équation (1), on trouve aussi:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -\cos x + \psi'(y) \quad (2)$$

Par comparaison de (1) et (2), on trouve:

$$\psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = Cte = C$$

Donc:

$$f(x, y) = -y \cos x + C$$

Exercice 3

1. **Calcul de P_1 dans le réservoir à la fin du gonflage:**

Pneu de volume $V = 50 \text{ l}$

Réservoir R d'air comprimé de volume $V_0 = 80 \text{ l}$ et de pression initial $P_0 = 15 \text{ bars}$.

Soit N le nombre de moles de gaz à l'état initial dans R et n le nombre de moles de gaz à introduire dans le pneu pour le gonfler:

$$N = \frac{P_0 V_0}{RT} \quad \text{et} \quad n = \frac{PV}{RT}$$

Après gonflage d'un pneu, il reste dans le réservoir R:

$$N - n = \frac{P_1 V_0}{RT} = \frac{P_0 V_0}{RT} - \frac{PV}{RT} \Rightarrow P_1 V_0 = P_0 V_0 - PV \Rightarrow \boxed{P_1 = P_0 - P \frac{V}{V_0}}$$

A.N: $P_0 = 15 \text{ bars}$, $V = 50 \text{ l}$, $P = 2.6 \text{ bars}$ et $V_0 = 80 \text{ l}$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 = 13.4 \text{ bars}}$$

2. **Nombre de pneus, qu'on peut gonfler de cette façon:**

Un pneu gonflé contient n moles de gaz telle que $n = \frac{PV}{RT}$, or le nombre total de moles de gaz à l'état initial dans R est N . Donc, on peut gonfler N/n pneus:

$$\frac{N}{n} = \frac{P_0 V_0}{PV} = \frac{15.80}{2.6.50} = 9.2$$

\Rightarrow On peut gonfler 9 pneus.

3. Etat de la roue avant avoir roulé sur autoroute est: $P_1 = 2$ bars et $T_1 = 27$ °C.
Etat de la roue après avoir roulé sur autoroute est: P_2 et $T_2 = 57$ °C.

(a) Calcul de la pression P_2 de l'air dans le pneu:

Air= gaz parfait, $V = Cte$ et $n = Cte$ (système fermé) Etat initial: $P_1V = nRT_1$
Etat final: $P_2V = nRT_2$

$$\Rightarrow \frac{P_2V}{P_1V} = \frac{nRT_2}{nRT_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow P_2 = \frac{T_2}{T_1}P_1$$

A.N: $P_2 = 2.2 \text{ bars}$

(b) Quelle température risque-t-il d'exploser $T_E = ?$:

Soit T_E température atteinte lorsque la pression dans le pneu est $P_{max} = 6$ bars.
On a:

$$\begin{aligned} P_{max} \cdot V &= nRT_E \quad \text{et} \quad P_1V = nRT_1 \\ \frac{P_{max} \cdot V}{P_1V} &= \frac{nRT_E}{nRT_1} \Rightarrow \frac{P_{max}}{P_1} = \frac{T_E}{T_1} \Rightarrow T_E = \frac{P_{max}}{P_1}T_1 \end{aligned}$$

A.N: $T_E = 900 \text{ } ^\circ K = 627 \text{ } ^\circ C$

Exercice 4

1. Calcul de la pression subie par le sol lorsque la chaise porte une personne de 800 N

$$P = \frac{F}{S}$$

A.N: $F = 50 + 800 = 850 \text{ N}$ et $S = 3.10^{-4} \cdot 4 = 1,2.10^{-3} \text{ m}^2$

$$P = 70833.33 \text{ N.m}^{-2}$$

Exercice 5

On a: $f(P, V, T) = 0$, équation d'état d'un système thermodynamique.

1. La relation liant les dérivées partielles des paramètres d'état P , V et T :

$$P = P(V, T) \Rightarrow dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT \quad (3)$$

$$V = V(P, T) \Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT \quad (4)$$

$$T = T(P, V) \Rightarrow dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV \quad (5)$$

On remplace dV par son expression dans (3):

$$dP = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_V \right] dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$$

Cette égalité impose les relations suivantes:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_V = 0$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T &= 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V = - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\end{aligned}$$

On multiplie les deux termes par $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$, on trouve:

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V = -1}$$

Puis on remplace dT dans (3) et on multiplie dans l'inverse de terme qui se trouve à droite on trouve:

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_V = -1}$$

On note que toute relation obtenue par permutation circulaire des paramètres P , V et T , vérifie cette égalité.

2. **La relation liant les coefficients thermoélastiques α , β et χ_T :**

On a:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T &= -1 \\ \alpha V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \beta P = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad \text{et} \quad -\chi_T V = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \\ \frac{1}{\beta P} &= \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\chi_T V} = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = P\beta\chi_T}\end{aligned}$$

3. **Calcul de l'accroissement de pression $\Delta P = ?$**

$$\begin{aligned}V = Cte \quad \Rightarrow \quad dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT = P\beta dT = \frac{\alpha}{\chi_T} dT \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{\alpha}{\chi_T} \Delta T = \frac{18.10^{-5}}{3.10^{-6}} = 60 \text{ atm}}\end{aligned}$$

Exercice 6

1. **Calcul des coefficients thermoélastiques α , β et χ_T :**

(a) **Pour un gaz parfait: $PV = nRT$:**

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \text{avec} \quad V = \frac{nRT}{P} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P} = \frac{V}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{T}} \\ \beta &= \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad \text{avec} \quad P = \frac{nRT}{V} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V} = \frac{P}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{1}{T}}\end{aligned}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \text{avec } V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2} = -\frac{PV}{P^2} = -\frac{V}{P}$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_T = \frac{1}{P}}$$

(b) Pour un gaz d'équation d'état $P(V - nb) = nRT$:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \text{avec } V = \frac{nRT}{P} + nb \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{P} = \frac{V}{T} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{nR}{PV}}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad \text{avec } P = \frac{nRT}{V - nb} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V - nb} = \frac{P}{T} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{T}}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \text{avec } V = \frac{nRT}{P} + nb \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2}$$

$$\Rightarrow \chi_T = \frac{nRT}{P^2 V} = \frac{(nRT)(V - nb)}{(PV)(nRT)} \Rightarrow \boxed{\chi_T = \frac{V - nb}{PV}}$$

(c) Pour un gaz d'équation d'état $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$:

La méthode la plus simple consiste à différentier l'équation d'état:

$$\left(dP - 2n^2 \frac{a}{V^3}\right)(V - nb) + \left(P + n^2 \frac{a}{V^2}\right)dV = nRdT$$

$$(V - nb)dP + \left(P - n^2 \frac{a}{V^2}\right)dV = nRdT$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad \text{à } P = \text{Cte} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{nR}{PV - n^2 \frac{a}{V} + 2n^3 \frac{ab}{V^2}}}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} \quad \text{à } V = \text{Cte} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{nR}{P(V - nb)}}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad \text{à } T = \text{Cte} \Rightarrow \boxed{\chi_T = \frac{V - nb}{PV - n^2 \frac{a}{V} + 2n^3 \frac{ab}{V^2}}}$$

(d) Le coefficient β d'un tel gaz et le comparer à celui d'un gaz parfait

On sait que $\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$, on doit donc calculer $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ dans le cas d'un gaz de Van der Waals:

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V - nb}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \frac{nR}{V - nb} = \frac{1}{P} \frac{\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)}{T} = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{n^2 a}{PV^2}\right) \quad \text{car } \frac{1}{T} \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right) = \frac{nR}{(V - nb)}$$

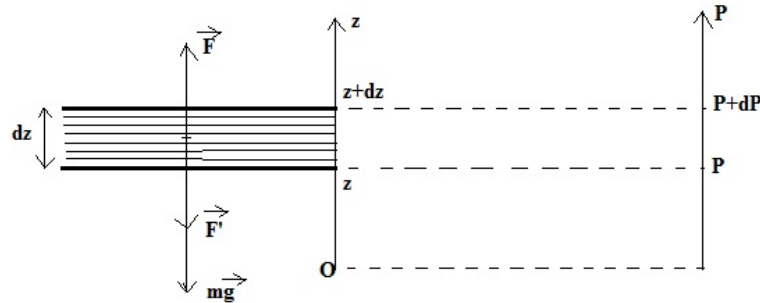
Donc:

$$\boxed{\beta_{V.W} = \beta_{G.P} \left(1 + \frac{n^2 a}{PV^2}\right)} \quad \text{car } \beta_{G.P} = \frac{1}{T}$$

Exercice 7

1. La relation différentielle de la statique des fluides: $dP = -\rho g dz$

Considérons une tranche d'air comprise entre z et $z + dz$ de section S et de masse m et en équilibre mécanique:



Les forces qui sont exercé par l'air au niveau z et $z + dz$ et le poids.

- \vec{F} = force exercée par l'air au niveau z .
- \vec{F}' = force exercée par l'air au niveau $z + dz$.
- $m\vec{g}$ = poids de la tranche d'air.

On suppose que cette tranche d'air se trouve à l'équilibre: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$

Par projection sur l'axe Oz , on trouve:

$$-mg - F' + F = 0 \text{ avec } F = PS \text{ et } F' = (P + dP)S$$

$$\boxed{dP = -\frac{mg}{S}}$$

D'autre part, on a:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sdz} \Rightarrow m = \rho S dz$$

On obtient, alors:

$$\boxed{dP = -\rho g dz}$$

2. Quelle masse molaire convient-il d'attribuer à l'air

On attribue à l'air une masse moyenne pondérée:

$$\boxed{M_{air} = 21 \% . M_{O_2} + 79 \% . M_{N_2} = \frac{32.21 + 79.28}{100} = 28.91 \text{ g}}$$

3. Calcul de la pression au sommet d'une montagne se trouvant à une altitude $z = 800 \text{ m}$

On a: $dP = -\rho g dz$ et l'air est considéré comme gaz parfait:

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} \text{ avec } T = Cte = 300^\circ K \text{ (par hypothèse)}$$

$$dP = -\frac{MP}{RT} g dz \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz \Rightarrow \int_{P_0}^{P_z} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^z dz$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = P_0 e^{-\left(\frac{Mgz}{RT}\right)}}$$

A.N. $z = 800 \text{ m}$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $M = 28,91 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$, $R = 8,32 \text{ J/moles.}^\circ K$,
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et $T = 300 \text{ }^\circ K$

$$\Rightarrow \boxed{P(z = 800 \text{ m}) = 0,97 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,97 \text{ atm}}$$

	TRAVAUX DIRIGÉS MODULE THERMODYNAMIQUE Série 1 d'exercices et solutions 2020/2021	
--	--	--

Exercice 1 : Une chaise pesante 50N repose sur le sol par 4 pieds dont les surfaces de contact ont 3cm². Calculer la pression subie par le sol lorsque la chaise porte une personne de 800N.

Exercice 2 : Gonflage d'un pneu

On gonfle à température constante un pneu de volume V=50 litres au moyen d'air comprimé contenu dans un réservoir R de volume V₀=80 litres où la pression initiale est P₀=15 P_{atm} avec P_{atm}=1 bar. La pression initiale du pneu est considérée comme nulle et sa pression finale est P=2,6P_{atm}. L'air sera considéré comme un gaz parfait.

- a. Calculer la pression P₁ dans le réservoir à la fin du gonflage.
- b. Combien de pneus peut-on gonfler de cette façon ?

Exercice 3 : Pression P, température T et volume V représentent les variables d'état du système étudié. Elles sont reliées par une équation d'état f(P, V, T)=0.

- 1) Trouver la relation liant les dérivées partielles des paramètres d'état P, V, et T.
- 2) Trouver la relation liant les coefficients thermoélastiques, c'est à dire le coefficient de dilatation à pression constante $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$, le coefficient d'augmentation de pression à volume constant

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad \text{et} \quad \text{le coefficient de compressibilité isotherme } \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

- 3) Calculer l'accroissement de pression subi par une masse donnée de mercure lorsqu'on la chauffe de 0 °C à 1 °C à volume constant en supposant $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ indépendant de T.

Application numérique : $\alpha = 18.10^{-5} K^{-1}$ $\chi_T = 3.10^{-6} atm^{-1}$.

- 4) Calculer les coefficients thermoélastiques, α , β et χ_T pour le gaz parfait puis pour un gaz d'équation d'état P(V - nb) = nRT.

Exercice 4 : Le coefficient de dilatation à pression constante et le coefficient d'augmentation de pression à volume constant d'un système thermodynamique, sont respectivement donné par :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}; \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T}$$

Trouver l'équation d'état f(P, V, T) = 0 de la substance.

Exercice 5 : Soit un fil élastique de longueur " au repos "L₀ à la température T₀. Lorsqu'on exerce sur ce fil une traction F, l'expérience montre que la longueur change et devient L et que la température T varie.

- 1) Justifier la relation $dL = \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_F dT + \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)_T dF$.

- 2) On définit le coefficient de dilatation linéaire à force constante par $\lambda = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_F$ et le module

d'Young par $E = \frac{L}{S} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T$ où S est la section du fil. Exprimer $\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L$ et dF .

3) Pour la substance parfaitement élastique constituant le fil, l'équation d'état s'écrit

$$F = AT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

a- Calculer E et E_0 (valeur de E à traction nulle).

b- Calculer λ et λ_0 (valeur de λ à traction nulle)

Exercice 6 : Soit une mole d'un gaz occupant le volume V_m sous la pression P et à la température T .

1) On suppose que ces grandeurs sont liées par l'équation : $\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$, où a , b et R sont des constantes. Utiliser les propriétés d'intensivité ou d'extensivité des grandeurs pour établir l'équation correspondante relative à n moles.

2) Même question pour l'équation : $P(V_m - b) \exp\left(\frac{a}{RTV_m}\right) = RT$.

Exercice 7 : On considère du sable fin dont chaque grain occupe un volume $V_0 = 0,1 \text{ mm}^3$. Quel est le volume V occupé par $N = 6.10^{23}$ grains ? Si on étendait uniformément ce sable sur le Maroc (d'aire $S = 712550 \text{ km}^2$) quelle serait la hauteur de la couche de sable ?

Exercice 8 : On veut construire un thermomètre permettant de repérer des températures comprises entre 0°C et 250°C . On dispose d'une colonne cylindrique de 40 cm de long et de volume intérieur 32 mm^3 . Calculer :

- 1) Le volume V_0 du réservoir.
- 2) La masse m du mercure nécessaire.
- 3) La sensibilité et la mobilité du thermomètre (plus petite variation de température décelable $\Delta\theta$, appelée aussi "résolution").

On donne : $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g.cm}^{-3}$; $k = 1/6400 \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$ (k coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre).

N.B.: ρ_{Hg} et k ne varient pas dans l'intervalle $[0^\circ\text{C}, 250^\circ\text{C}]$.

Exercice 9 : Echelle thermométrique : Lorsque la soudure de référence d'un thermocouple est à 0°C (glace fondante) et l'autre à la température θ , exprimée en $^\circ\text{C}$, la f.e.m thermoélectrique fournie par le thermocouple est donnée par la relation : $E = a\theta + b\theta^2$ avec $a = 0,20 \text{ mV (}^\circ\text{C)}^{-1}$ et $b = -5,0 \cdot 10^{-4} \text{ mV (}^\circ\text{C)}^{-2}$.

Supposons que nous définissions une échelle de température par la relation linéaire $\theta^* = \alpha E + \beta$ en considérant la f.e.m comme étant le phénomène thermoélectrique tel que $\theta^* = 0$ pour la glace fondante et $\theta^* = 100$ à la température de l'eau bouillante sous pression atmosphérique normale.

- 1) Trouver les valeurs de α et β .
- 2) Exprimer l'écart $\theta - \theta^*$:
 - a- en fonction de E , et déterminer la valeur de E qui correspond à l'écart maximal.
 - b- en fonction de θ , et déterminer la valeur de θ qui correspond à l'écart maximal.
- 3) Calculer la valeur de cet écart, et représenter graphiquement E en fonction de θ et θ^* .

**T.D. THERMODYNAMIQUE
SOLUTION DE LA SERIE 1
FILIERE SM & SMIA**

Exercice 1 : Pression subit par le sol par une chaise portant une personne

$$F = 50 + 800 = 850 \text{ N}, S = 4.3.10^{-4} = 1,2.10^{-3}$$

$$P = \frac{F}{S} = \frac{850}{1,2.10^{-3}} = 70833,33 \text{ N/m}^2$$

Exercice 2 :

a°) Pneu de volume $V = 50\text{l}$

Réservoir R d'air comprimé de volume $V_0 = 80\text{l}$ et de pression initial $P_0 = 15\text{bars}$

Soit N le nombre de moles de gaz à l'état initial dans R et n le nombre de moles de gaz à introduire dans le pneu pour le gonfler :

$$N = \frac{P_0 V_0}{RT} \quad \text{et} \quad n = \frac{PV}{RT}$$

Après gonflage d'un pneu, il reste dans le réservoir R :

$$N-n = \frac{P_1 V_0}{RT} = \frac{P_0 V_0}{RT} - \frac{PV}{RT} \Rightarrow P_1 V_0 = P_0 V_0 - PV \Rightarrow$$

$$P_1 = P_0 - P \frac{V}{V_0}$$

A.N : $P_0 = 15\text{bars}$, $V = 50\text{l}$, $P = 2.6\text{bars}$, $V_0 = 80\text{l}$

$$\Rightarrow \underline{P_1 = 13.4\text{bars}}$$

b°) Un pneu gonflé contient n moles de gaz telle que $n = \frac{PV}{RT}$, or le nombre total de moles de gaz à l'état initial dans R est N . Donc on peut gonfler N/n pneus.

$$N/n = \frac{P_0 V_0}{PV} = \frac{15.80}{2,6.50} = 9.2 \Rightarrow \text{on peut gonfler 9 pneus.}$$

Exercice 3 :

$f(P,V,T) = 0$, Equation d'état d'un système thermodynamique.

1°)

$$P = P(V,T) \rightarrow dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV \dots\dots\dots(1)$$

$$V = V(P, T) \rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \dots\dots\dots(2)$$

$$T = T(P, V) \rightarrow dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV \dots\dots\dots(3)$$

On remplace dV par son expression dans (1) :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \right]$$

$$dP = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \right] dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

Cette égalité impose les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}} \dots\dots\dots (5)$$

$$(3) \text{ dans } (1) \Rightarrow dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left[\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV \right] + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\Rightarrow dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \right] dV \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = 1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V}} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$(4) \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$$(6) \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = - \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -1}$$

On a aussi :

$$(7) \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = - \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1}$$

On note que toute relation obtenue par permutation circulaire des paramètres P, V et T, vérifie cette égalité.

2°) On a :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \alpha V \quad , \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = -\frac{1}{\chi_T V} \quad , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} = \frac{1}{P\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = P\beta\chi_T}$$

$$3^\circ) V = \text{Cte} \Rightarrow dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT = P\beta dT = \frac{\alpha}{\chi_T} dT$$

$$\boxed{\Delta P = \frac{\alpha}{\chi_T} \Delta T = \frac{18.10^{-5}}{3.10^{-6}} = 60 \text{ atm}}$$

4°) Gaz parfait: $PV = nRT$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \text{ avec } V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P} = \frac{V}{T} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{T}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \text{ avec } P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V} = \frac{P}{T} \Rightarrow \beta = \frac{1}{T}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \text{ avec } V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{nRT}{P^2} = -\frac{PV}{P^2} = -\frac{V}{P} \Rightarrow \chi_T = \frac{1}{P}$$

Gaz d'équation $P(V - nb) = nRT$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \text{ avec } V = \frac{nRT}{P} + nb \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P} \Rightarrow \alpha = \frac{nR}{PV}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \text{ avec } P = \frac{nRT}{V - nb} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V - nb} = \frac{P}{T} \Rightarrow \beta = \frac{1}{T}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \text{ avec } V = \frac{nRT}{P} + nb \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{nPT}{P^2} \Rightarrow \chi_T = \frac{nRT}{P^2 V} = \frac{(nRT)(V - nb)}{(PV)(nRT)} \Rightarrow \chi_T = \frac{V - nb}{PV}$$

Exercice 4 :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}; \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T}$$

Equation d'état ?

$$P = \text{Cte} \quad \alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \Rightarrow \text{Log } V + f(P) = \text{Log } T + \text{Log } C_1$$

$$\forall f(P) \exists \varphi(P) / f(P) = \text{Log } \varphi(P) \Rightarrow V \varphi(P) = C_1 T \dots \dots \dots (1)$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T}; V = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} \Rightarrow \text{Log } P + g(V) = \text{Log } T + \text{Log } C_2$$

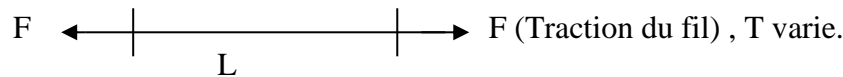
$$\forall g(V) \exists \psi(V) / g(V) = \text{Log } \psi(V) \Rightarrow P \psi(V) = C_2 T \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\varphi(P)}{\psi(V)} = \frac{C_1 P}{C_2 V} = \text{Cte} \cdot \frac{P}{V} \Rightarrow \varphi(P) = C_1' P \text{ et } \psi(V) = C_2' V \text{ avec } C_1' \text{ et } C_2' \text{ des}$$

$$\text{constantes tel que : } \frac{C_1'}{C_2'} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$(1) \Rightarrow V C_1' P = C_1 T \Rightarrow \underline{PV = CT} \text{ C'est l'équation d'état d'un gaz parfait.}$$

Exercice 5 : Fil élastique de longueur L_0 au repos à la température T_0



1°) La longueur du fil est une fonction de T et F $\Rightarrow L = L(T, F)$

$$\Rightarrow dL = \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_F dT + \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)_T dF$$

$$2^\circ) \lambda = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_F; E = \frac{L}{S} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L ? \quad dF ?$$

$$L = L(T, F) \Rightarrow f(L, T, F) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_L \left(\frac{\partial T}{\partial L} \right)_F \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)_T = -1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L \left(\frac{1}{L\lambda} \right) \left(\frac{L}{ES} \right) = -1 \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L = -ES\lambda$$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L dT + \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T dL = -ES\lambda dT + \frac{ES}{L} dL$$

$$3^\circ) F = AT \left[\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right] \quad A = \text{Cte}$$

$$dF = A \left[\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right] dT + \frac{AT}{L_0} \left[1 + 2 \frac{L_0^3}{L^3} \right] dL = -ES\lambda dT + \frac{ES}{L} dL$$

Par identification on a :

$$-ES\lambda = A \left[\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right] (1) \text{ et } \frac{ES}{L} = \frac{AT}{L_0} \left[1 + 2 \frac{L_0^3}{L^3} \right] (2)$$

a°)

$$(2) \Rightarrow E = \frac{ATL}{SL_0} \left[1 + 2 \frac{L_0^3}{L^3} \right]$$

E_0 = valeur de E à traction nulle ($F=0$)

$$F = 0 \Rightarrow L = L_0 \text{ et } T = T_0 \Rightarrow E_0 = \frac{3AT_0}{S}$$

b°)

$$(1) \Rightarrow \lambda = -\frac{A}{ES} \left[\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right] = -\frac{1 - \frac{L_0^3}{L^3}}{T \left[1 + 2 \frac{L_0^3}{L^3} \right]} \quad \text{et } \lambda_0 = 0$$

Exercice 6 :

1) Soit V, le volume de n moles. Comme $V_m = \frac{V}{n}$ on a:

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT \Leftrightarrow \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) \left(\frac{V}{n} - b \right) = RT \Leftrightarrow \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

$$2) P(V_m - b) \exp\left(\frac{a}{RTV_m}\right) = RT \Leftrightarrow P(V - nb) \exp\left(\frac{na}{RTV}\right) = nRT$$

Exercice 7 :

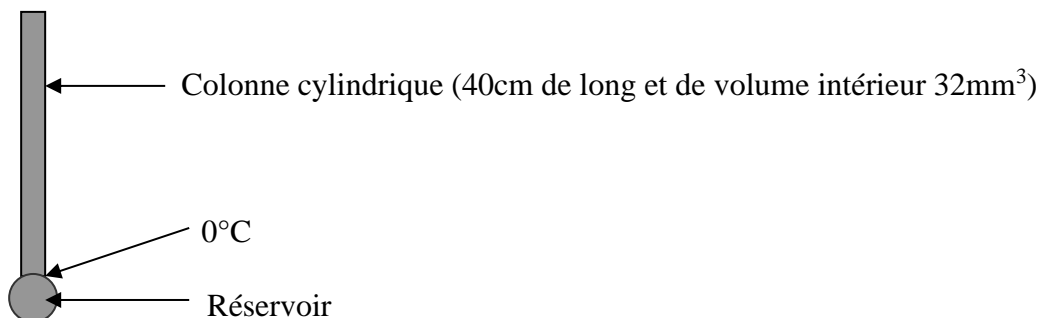
Le volume occupé est $V = N \cdot V_0 = 6.10^{23} \cdot 10^{-10} = 6.10^{13} \text{ m}^3 = 6.10^{16} \text{ L}$.

Ce sable étalé sur $S = 712550 \text{ km}^2 = 712550 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ formerait une couche de hauteur :

$$h = \frac{V}{S} = 84,2 \text{ m}.$$

Exercice 8 : Fabrication d'un thermomètre.

Thermomètre pour la mesure des températures contenues dans l'intervalle $[0, 250^\circ\text{C}]$



1) Volume V_0 du réservoir.

Mesure des températures de 0°C à 250°C , cela veut dire que le niveau de mercure affleure, au bas de la colonne à 0°C et en haut à 250°C .

$$\Rightarrow V_{250} - V_0 = 32\text{mm}^3$$

L'échelle est définie par la relation :

$$V_\theta = V_0(1 + k\theta) \Rightarrow V_\theta - V_0 = V_0 k \theta \Rightarrow V_{250} - V_0 = 250 \cdot V_0 k = 32\text{mm}^3 \Rightarrow V_0 = \frac{32}{250k}$$

$$\text{A.N : } V_0 = \frac{32.6400}{250} = 819,2\text{mm}^3 = 0,8192\text{cm}^3$$

2) la masse m du mercure nécessaire :

$$\text{On a } \rho = \frac{m}{V} = \text{masse volumique}$$

$$\rho_{\text{Hg}} = \frac{m}{V_0} \Rightarrow m = \rho_{\text{Hg}} \cdot V_0$$

$$\text{A.N : } \rho_{\text{Hg}} = 13,6\text{g/cm}^3 ; V_0 = 0,8192\text{cm}^3 \Rightarrow \underline{\underline{m = 11,14\text{g}}}$$

3) La sensibilité et la mobilité du thermomètre.

—————> Sensibilité du thermomètre :

On a : $V_\theta - V_0 = h \cdot S$ avec S la section de la colonne et h la hauteur de la colonne à la température θ . Donc $V_\theta - V_0 = h \cdot S = V_0 \cdot k \cdot \theta$

Par définition la sensibilité est donné par : $S = \frac{dh}{d\theta}$ avec $h = \frac{V_0 k \theta}{S} \Rightarrow S = \frac{V_0 k}{S}$

$$\text{A.N : } V_{250} - V_0 = H \cdot S = 32\text{mm}^3$$

$$\Rightarrow S = 32/H \text{ avec } H = 40\text{cm} = 400 \text{ mm} \Rightarrow S = 32/400 = 0,08 \text{ mm}^2$$

$$S = V_0 k / S = \frac{819,2}{0,08.6400} = 1,6\text{mm}/^\circ\text{C}$$

—————> Mobilité du thermomètre.

$$\text{On a : } S = \frac{dh}{d\theta} = \text{Cte} \Rightarrow S = \frac{\Delta h}{\Delta \theta} \Rightarrow \Delta \theta = \Delta h / S$$

Connaissant Δh , on peut calculer la résolution $\Delta \theta$.

$$\text{Si } \Delta h = 0,5\text{mm} \Rightarrow \Delta \theta = 0,31^\circ\text{C}$$

Exercice 9 :

$$E = a\theta + b\theta^2 \dots\dots\dots \theta(^\circ\text{C})$$

Echelle de température $\theta^* = \alpha E + \beta$

$$\theta^* = 0 = \theta \quad (\text{Glace fondante})$$

$$\theta^* = 100 = \theta \quad (\text{Eau bouillante})$$

1) α ? β ?

On a :

$$0 = \alpha E_0 + \beta \dots \dots \dots (1) \text{ avec } E_0 = 0$$

$$100 = \alpha E_{100} + \beta \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \theta^* = \alpha E \text{ et } (2) \Rightarrow \alpha = \frac{100}{E_{100}} \text{ avec } E_{100} = 100a + (100)^2 b$$

$$\alpha = \frac{100}{100a + (100)^2 b} = \frac{100}{20 - 5} = \frac{100}{15} = 6,67^\circ / mV$$

Donc :

$$\theta^* = 6,67E$$

2) Ecart $\theta - \theta^*$?

a) on a : $\theta^* = \alpha E = g(\theta)$

$$\theta = f(E) ?$$

$$E = b\theta^2 + a\theta \Rightarrow \theta^2 + \frac{a}{b}\theta - \frac{E}{b} = 0$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{0,2}{5.10^{-4}} = -400(^\circ C) \text{ et } \frac{1}{b} = -\frac{1}{5.10^{-4}} = -2000((^\circ C)^2 / mV)$$

$\Rightarrow \theta^2 - 400\theta + 2000E = 0$ Equation du second degré dont les racines sont :

$$\theta / \theta' = 200 \mp 200(1 - \frac{E}{20})^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta' = 200 + 200(1 - \frac{E}{20})^{\frac{1}{2}} > 200^\circ C ; \text{ Cette solution est à rejeter car on cherche } \theta \in [0, 100^\circ C].$$

La solution est donc :

$$\theta = 200 - 200(1 - \frac{E}{20})^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = 200 \left[1 - \left(1 - \frac{E}{20} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Rightarrow \theta - \theta^* = 200 \left[1 - \left(1 - \frac{E}{20} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - 6,67E$$

$$\left[\frac{d(\theta - \theta^*)}{dE} \right]_{Em} = 0 = \frac{200}{2.20} \left(1 - \frac{Em}{20} \right)^{-\frac{1}{2}} - 6,67 \Rightarrow Em = 8,76 mV$$

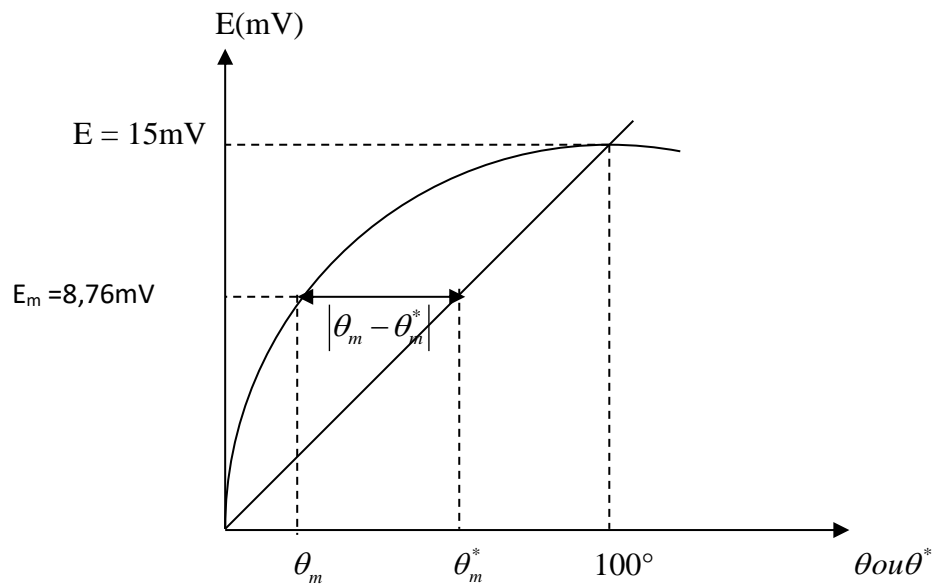
b) $b\theta^2 + a\theta = \frac{\theta^*}{6,67} \Rightarrow 6,67b\theta^2 + 6,67a\theta - \theta = \theta^* - \theta$

$$\theta^* - \theta = 33,35.10^{-4}\theta^2 - 0,334\theta$$

$$\left[\frac{d(\theta^* - \theta)}{d\theta} \right]_{\theta_m} = 0 = 66,70 \cdot 10^{-4} \theta_m - 0,334 \Rightarrow \boxed{\theta_m = 50,07^\circ C}$$

3) $E_m = 8,76 \text{ mV} \Rightarrow \theta_m = 58,43^\circ$ et donc :

$$\boxed{|\theta - \theta^*|_{\max} = 58,43 - 50,07 = 8,36^\circ}$$



Fin de la solution de la série 1

	TRAVAUX DIRIGÉS MODULE THERMODYNAMIQUE Série 2 d'exercices et solutions 2020/2021	
--	--	--

Exercice 1 : 1) Etablir la relation différentielle de la statique des fluides : $dP = -\rho g dZ$.

2) Quelle masse molaire convient-il d'attribuer à l'air, sachant que ce dernier est assimilé à un gaz parfait diatomique formé de 21% d'oxygène et de 79% d'azote ? On donne $M_{O_2} = 32g$, $M_{N_2} = 28g$.

3) Calculer la pression au sommet d'une montagne se trouvant à une altitude $Z = 800m$. On suppose que la température de l'air est uniforme et est égale à $300K$. La pression à $Z=0$ est $P_0 = 10^5 Pa$.

Exercice 2 : À quelle température faut-il porter l'hélium (considéré comme un gaz parfait) pour que la vitesse quadratique de ses atomes soit égale à $2000m/s$? Quelle est alors l'énergie cinétique moyenne d'une mole de ce gaz ?

Exercice 3 : Mélange idéal de gaz parfait

Trois récipients contiennent respectivement de l'hydrogène, de l'oxygène et de l'azote dans les conditions suivantes :

- H_2 : $V_1 = 2,25 l$; $P_1 = 250 mmHg$; $T_1 = 293K$;
- O_2 : $V_2 = 5,50 l$; $P_2 = 250 mmHg$; $T_2 = 293K$;
- N_2 : $V_3 = 1,40 l$; $P_3 = 760 mmHg$; $T_3 = 273K$.

1) Calculer les masses m_1 , m_2 et m_3 de chaque gaz en les supposant parfaits.

2) On mélange ces gaz dans le même récipient de volume $V_0 = 18,5 l$ à la température de $T_0 = 273K$; on suppose que le mélange ainsi formé est idéal. Calculer la pression totale, la fraction molaire de chaque gaz, et les différentes pressions partielles.

On donne les masses molaires atomiques :

$M(H) = 1 g/mol$; $M(O) = 16 g/mol$; $M(N) = 14 g/mol$.

Exercice 4 : Travail mécanique des forces extérieures de pression (cas d'un gaz).

A- Soit une mole de gaz subissant une compression quasi statique et isotherme de (P_0, T_0) à $(2P_0, T_0)$. Donner l'expression du travail reçu par le gaz selon qu'il s'agit :

1- d'un gaz parfait (on exprimera W en fonction de T_0);

2- d'un gaz de Van der Waals : $(P + a/V^2)(V - b) = RT$ (on exprimera W en fonction de V_i et V_f ; les volumes dans l'état initial et l'état final).

B- Calculer le travail fourni par la détente isotherme d'une mole de gaz parfait, initialement à la pression $P_1 = 10atm$ jusqu'à une pression final $P_2 = 3atm$ en fonction du produit RT . On fera le calcul dans trois cas différents :

a) détente réversible,

b) la pression passe brutalement de P_1 à P_2 ,

c) la pression passe brutalement de P_1 à $2P_2$, on laisse l'équilibre s'établir puis on détend brutalement de $2P_2$ à P_2 .

d) Comparer $|W|$ dans les trois cas. Faire une conclusion.

Exercice 5 : Travail mécanique des forces extérieures de pression (cas d'un liquide).

De l'eau liquide dans les conditions (P_0 , V_0 , T_0) subit une transformation quasi statique, son volume restant infiniment voisin de V_0 . Les coefficients thermoélastiques α , β et χ_T de l'eau sont connus et supposés constants.

- 1- Justifier l'expression du travail élémentaire sous la forme $\delta W = V_0 P (\chi_T dP - \alpha dT)$.
- 2- Préciser le travail échangé par l'eau avec le milieu extérieur lors des transformations suivantes :
 - a) transformation isochore ;
 - b) transformation quasi statique et isobare (on exprimera W en fonction de α , P_0 , V_0 , T_0 et T_1 la température atteinte) ;
 - c) transformation quasi statique et isotherme (on exprimera W en fonction de χ_T , V_0 , P_0 et P_1 la pression atteinte).

Exercice 6 : Travail mécanique des forces extérieures de pression (cas d'un solide).

Un solide a une compressibilité isotherme χ_T constante. Il subit une transformation isotherme et quasi statique telle que la pression passe de la valeur P_1 à la valeur P_2 .

- 1- Calculer le travail reçu de l'extérieur.
- A.N:** $\chi_T = 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$; $P_1 = 1 \text{ atm}$; $P_2 = 100 \text{ atm}$; $V = 1 \text{ l}$.
- 2- Comparer au travail que recevrait un gaz parfait de même volume initial sous la pression P_1 lors d'une transformation identique.

Exercice 7 : Travail reçu par un gaz pour différents chemins suivis.

On considère deux moles de dioxygène, gaz supposé parfait, que l'on peut faire passer réversiblement de l'état initial A (P_A , V_A , T_A) à l'état final B ($P_B = 3 P_A$, V_B , $T_B = T_A$) par trois chemins distincts :

- a- chemin A 1 B: transformation isotherme ;
- b- chemin A 2 B: transformation représentée par une droite en diagramme de Clapeyron (P , V) ;
- c- chemin A 3 B: transformation composée d'une isochore puis d'une isobare.

- 1- Représenter les trois chemins dans le diagramme de Clapeyron.
 - 2- Calculer dans chaque cas les travaux mis en jeu en fonction de T_A , et faire une conclusion.
- A.N :** $T_A = 300 \text{ K}$.

Exercice 8 : Transfert thermique.

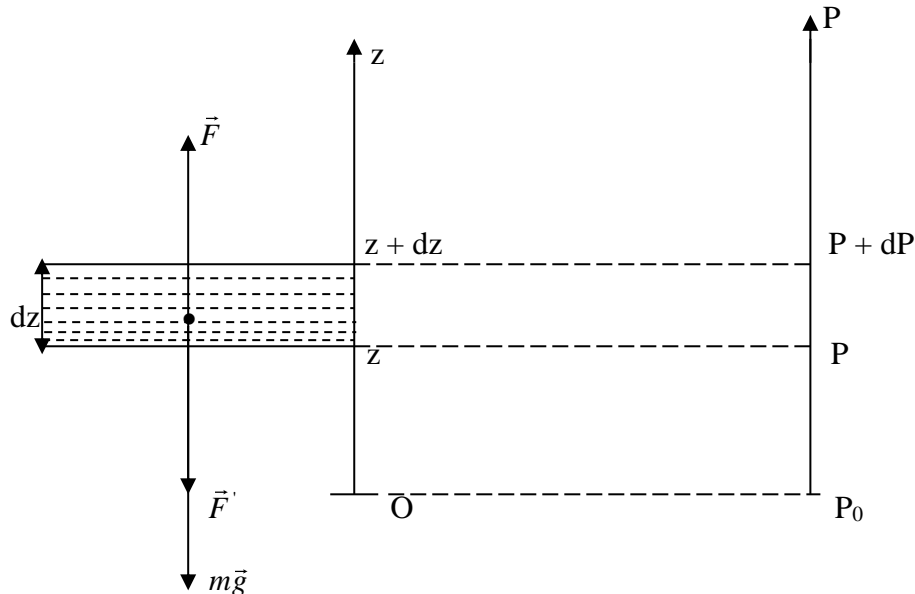
Aux faibles pressions, la capacité thermique massique à volume constant d'un gaz diatomique (monoxyde de carbone) est fonction de la température absolue T :

$C_V = A_0 - A_1 / T + A_2 / T^2$ où $A_0 = 1,41 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$, $A_1 = 492 \text{ J.g}^{-1}$ et $A_2 = 16.10^4 \text{ J.K}^{+1} \cdot \text{g}^{-1}$ pour C_V en $\text{J.K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$.

- 1- Calculer le transfert thermique pour une mole de monoxyde de carbone lorsque le gaz est chauffé de 27°C à 127°C à volume constant. (On donne les masses molaires : $\text{C} = 12 \text{ g.mol}^{-1}$ et $\text{O} = 16 \text{ g.mol}^{-1}$).
- 2- En déduire la capacité thermique massique moyenne relative à une mole de gaz.

T.D. THERMODYNAMIQUE
SOLUTION DE LA SERIE 2

Exercice 1 : 1) considérons une tranche d'air comprise entre z et $z + dz$, de section S et de masse m , et étudions son équilibre mécanique :



\vec{F} = force exercée par l'air au niveau z ,

\vec{F}' = force exercée par l'air au niveau $z + dz$

$m\vec{g}$ = poids de la tranche d'air.

On suppose que cette tranche d'air se trouve à l'équilibre : $\Rightarrow m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}' = 0$

Par projection sur l'axe Oz on trouve :

$-mg - F' + F = 0$ avec : $F = PS$ et $F' = (P + dP)S$

\Rightarrow

$$dP = -\frac{mg}{S}$$

D'autre part on a : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sdz} \Rightarrow m = \rho Sdz$

On obtient alors :

$$dP = -\rho g dz$$

2) On attribue à l'air

$$\frac{32.21 + 79.28}{100} = 28,91g$$

une masse moyenne pondérée : $M_{\text{air}} =$

3) Pression à une altitude $z = 800m$?

On a : $dP = -\rho g dz$ et l'air est considéré comme un gaz parfait :

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} \text{ avec } T = \text{Cte} = 300^\circ K \text{ (par hypothèse)}$$

$$dP = -\frac{MP}{RT} g dz \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

$$\Rightarrow \int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^z dz$$

\Rightarrow

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

A.N :

$$z = 800\text{m} ; P_0 = 10^5 \text{ Pa} ; M = 28,91 \cdot 10^{-3} \text{ kg} ; R = 8,32 \text{ J/moles}^\circ\text{K} ; g = 9,81 \text{ m/s}^2 ; T = 300^\circ\text{K}$$

$$P(z = 800\text{m}) = 0,97 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,97 \text{ atm}$$

Exercice 2:

$H_e = \text{Gaz parfait}, V^* = 2000 \text{ m/s} \quad T ?$

On a : $P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m v^{*2}$ et pour une mole $N = N_A$ (nombre d'Avogadro)

$$\Rightarrow PV = \frac{1}{3} N_A \frac{M}{N_A} v^{*2} \quad (M = \text{masse molaire})$$

$$\Rightarrow PV = \frac{1}{3} M v^{*2} = RT$$

\Rightarrow

$$T = \frac{M v^{*2}}{3R}$$

A.N :

$$M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} ; v^* = 2000 \text{ m/s} ; R = 8,32 \text{ J/moles}^\circ\text{K} \Rightarrow$$

$$T = 641^\circ\text{K}$$

Energie cinétique moyenne d'une mole de ce gaz:

$$U = \frac{1}{2} N_A m v^{*2} \text{ avec } N_A m = M = \text{masse molaire} \Rightarrow U = \frac{1}{2} M v^{*2}$$

A.N :

$$U = (1/2) \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot (2000)^2 = 8000 \text{ Joules/mole}$$

Autre

solution

$$U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} RT \quad (n = 1 \text{ mole}), \underline{U = (3/2) \cdot 8,32 \cdot 641 \cong 8000 \text{ Joules/mole}}$$

Exercice 3 :

1) Calcul de m_1 ; m_2 et m_3

$m_1 ? H_2$

$$P_1 V_1 = n_1 R T_1 = \frac{m_1}{M_1} R T_1 \Rightarrow m_1 = \frac{P_1 V_1 M_1}{R T_1}$$

A.N : $P_1 = 250/760 = 0,329 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$$V_1 = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ; T_1 = 293 \text{ K} ; M_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

\Rightarrow

$$m_1 = 0,061 \text{ g}$$

$$m_2 ? \quad O_2 \quad m_2 = \frac{P_2 V_2 M_2}{RT_2}$$

$$A.N : P_2 = 0,329.10^5 \text{ Pa} ; V_2 = 5,50.10^{-3} \text{ m}^3 ; T_2 = 293 \text{ K} ; M_2 = 32.10^{-3} \text{ kg}$$

\Rightarrow

$$m_2 = 2,38 \text{ g}$$

$$m_3 ? \quad N_2 \quad m_3 = \frac{P_3 V_3 M_3}{RT_3}$$

$$A.N : P_3 = 10^5 \text{ Pa} ; V_3 = 1,40.10^{-3} \text{ m}^3 ; T_3 = 273 \text{ K} ; M_3 = 28.10^{-3} \text{ kg}$$

\Rightarrow

$$m_3 = 1,73 \text{ g}$$

2) Melange de gaz ($H_2 + O_2 + N_2$)

$$\text{Melange} = G.P \quad \left| \begin{array}{l} V_0 = 18,5 \text{ l} \\ T_0 = 273^\circ \text{ K} \\ P ? \end{array} \right.$$

→ Calcul de la pression total P

$$\text{On a : } PV_0 = nRT_0 \Rightarrow$$

$$P = \frac{nRT_0}{V_0}$$

$$n = n_{H_2} + n_{O_2} + n_{N_2}$$

$$n_{H_2} = \frac{m_1}{M_1} = 0,0305 ; n_{O_2} = \frac{m_2}{M_2} = 0,0744 ; n_{N_2} = \frac{m_3}{M_3} = 0,0618 \Rightarrow n = 0,1667$$

\Rightarrow

$$P = 0,2045.10^5 \text{ Pa} = 0,2045 \text{ atm} = 155,4 \text{ mmHg}$$

→ Fraction molaire de chaque gaz : $x_i = \frac{n_i}{n}$

$$H_2 \longrightarrow x_{H_2} = \frac{n_{H_2}}{n} = \frac{0,0305}{0,1667} = 0,183$$

$$O_2 \longrightarrow x_{O_2} = \frac{n_{O_2}}{n} = \frac{0,0744}{0,1667} = 0,446$$

$$N_2 \longrightarrow x_{N_2} = \frac{n_{N_2}}{n} = \frac{0,0618}{0,1667} = 0,371$$

→ Pressions Partielles :

$$P_{H_2} ? P_{O_2} ? P_{N_2} ?$$

On a :

$$PV_0 = nRT_0 = n_{H_2} RT_0 + n_{O_2} RT_0 + n_{N_2} RT_0$$

$$PV_0 = P_{H_2} V_0 + P_{O_2} V_0 + P_{N_2} V_0 = (P_{H_2} + P_{O_2} + P_{N_2}) V_0$$

$$P_{H_2} = \frac{n_{H_2}RT_0}{V_0} = n_{H_2} \cdot \frac{P}{n} = x_{H_2} \cdot P = 28,4 \text{ mmHg}$$

$$P_{O_2} = \frac{n_{O_2}RT_0}{V_0} = n_{O_2} \cdot \frac{P}{n} = x_{O_2} \cdot P = 69,3 \text{ mmHg}$$

$$P_{N_2} = \frac{n_{N_2}RT_0}{V_0} = n_{N_2} \cdot \frac{P}{n} = x_{N_2} \cdot P = 57,7 \text{ mmHg}$$

Exercice4

Compression isotherme réversible

A- $(P_0, T_0) \longrightarrow (2P_0, T_0)$

1°) $W = f(T_0)$?

$$\text{Isotherme d'un Gaz Parfait} \Rightarrow PV = C^{\text{tte}} = RT_0 \Rightarrow P = \frac{RT_0}{V}$$

$$\delta W = -PdV = -RT_0 \frac{dV}{V} \Rightarrow W = -RT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\text{On a } PV = C^{\text{tte}} \Rightarrow d(PV) = 0 \Rightarrow PdV + VdP = 0 \Rightarrow -\frac{dP}{P} = \frac{dV}{V}$$

$$\text{Donc : } W = -RT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_0 \int_{P_0}^{2P_0} \frac{dP}{P} = RT_0 \left(\text{Log} P \right)_{P_0}^{2P_0} \\ \Rightarrow \boxed{W = RT_0 \text{Log} 2}$$

$$2^\circ) \text{ Gaz de Van der Waals: } \left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad W = f(V_i, V_f)?$$

$$\text{On a: } \delta W = -PdV \text{ avec } P = \frac{RT_0}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow \delta W = -\frac{RT_0}{V-b} dV + \frac{adV}{V^2}$$

$$\Rightarrow W = -RT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V-b} + a \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^2} \text{ et donc :}$$

$$\boxed{W = -RT_0 \text{Log} \frac{V_f - b}{V_i - b} - a \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right)}$$

B- Détente isotherme d'un gaz parfait ($n = 1$ mole).

$$T = C^{\text{tte}}$$

$(P_1 = 10 \text{ atm}, V_1, T) \longrightarrow (P_2 = 3 \text{ atm}, V_2, T)$

$$W = f(RT) ?$$

a- Détente réversible $\rightarrow W_1$

$$\delta W = -PdV \text{ avec } P = \frac{RT}{V} \Rightarrow \delta W = -RT \frac{dV}{V} \text{ et } PV = C^{\text{tte}} \Rightarrow d(PV) = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V}$$

$$\text{Donc : } W_1 = RT \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = RT \text{Log} \frac{P_2}{P_1} = RT \text{Log} \left(\frac{3}{10} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_1 = -1,2RT}$$

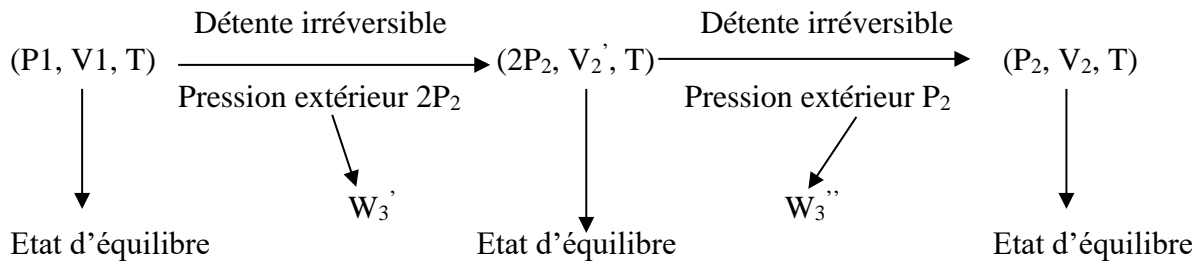
b- La pression passe brutalement de P_1 à $P_2 \rightarrow W_2$?

Au temps $t = 0$, la pression passe de P_1 à $P_2 \Rightarrow$ Evolution irréversible du système sous l'effet de la pression extérieure P_2 . A l'équilibre du système $P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}} = P_2$.

$$\Rightarrow \delta W = -P_{\text{ext}} dV = -P_2 dV \quad \Rightarrow W_2 = -P_2 (V_2 - V_1) = -P_2 \left(\frac{RT}{P_2} - \frac{RT}{P_1} \right) \text{ et donc :}$$

$$\boxed{W_2 = -RT \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right) = -0,7RT}$$

c- La pression passe brutalement de P_1 à $2P_2$, on attend l'équilibre puis on détend brutalement de $2P_2$ à P_2 .



$$W_3 = W_3' + W_3'' \text{ avec : } \begin{cases} W_3' = -2P_2 (V_2' - V_1) \\ W_3'' = -P_2 (V_2 - V_2') \end{cases} \quad \text{et } V_2' = \frac{RT}{2P_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_3 = -0,9RT}$$

d- Comparaison de $|W_1|, |W_2|$ et $|W_3|$

$$|W_1| > |W_3| > |W_2|$$

\Rightarrow Le gaz fournit plus de travail au milieu extérieur lors de la transformation réversible que celle purement irréversible.

Exercice 5 : Transformation réversible de l'eau :

$$\text{Transformation} \\ (P_0, V_0, T_0) \longrightarrow (P, V \cong V_0, T)$$

$$\alpha = C^{tte}, \beta = C^{tte}, \chi_T = C^{tte}$$

$$1- \delta W = PV_0 (\chi_T dP - \alpha dT) ?$$

On a: $\delta W = -PdV = -P \left[\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \right]$ On a:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \alpha V = \alpha V_0 \text{ et } \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -V \chi_T = -V_0 \chi_T$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W = PV_0 [\chi_T dP - \alpha dT]}$$

2- Travail échangé par l'eau avec le milieu extérieur :

a- Transformation isochore ($V = C^{te}$)

$$\Rightarrow \delta W = -PdV = 0 \Rightarrow \boxed{W = 0}$$

b- Transformation réversible isobare : $W = f(\alpha, P_0, V_0, T_0, T_1)$

$$\delta W = PV_0 \chi_T dP - PV_0 \alpha dT = -P_0 V_0 \alpha dT \Rightarrow W = -P_0 V_0 \alpha \int_{T_0}^{T_1} dT$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -P_0 V_0 \alpha (T_1 - T_0)}$$

c- Transformation réversible isotherme : $W = f(\chi_T, P_0, V_0, P_1)$

$$\delta W = PV_0 \chi_T dP \Rightarrow \delta W = V_0 \chi_T P dP \Rightarrow W = \chi_T V_0 \left[\frac{P^2}{2} \right]_{P_0}^{P_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{\chi_T V_0}{2} [P_1^2 - P_0^2]}$$

Exercice 6

1- Travail échangé par un solide avec le milieu extérieur :

Transformation isotherme réversible de (P_1, V, T) à (P_2, V, T)

$$\delta W = \chi_T V P dP \Rightarrow W = \chi_T V \left[\frac{P^2}{2} \right]_{P_1}^{P_2} \Rightarrow \boxed{W = \frac{\chi_T V}{2} [P_2^2 - P_1^2]}$$

A.N: $\chi_T = 10^{-11} / Pa; P_1 = 10^5 Pa; P_2 = 10^7 Pa; V = 10^{-3} m^3$

$$\boxed{W = \frac{10^{-11} \cdot 10^{-3}}{2} [10^{14} - 10^{10}] \cong 5 \cdot 10^{-1} \text{ Joules}}$$

2- Travail reçu par un gaz parfait ayant les mêmes conditions initiales que le solide et subissant la même transformation.

$$(P_1, V_1, T) \xrightarrow{\text{Isotherme réversible}} (P_2, V_2, T)$$

$$\delta W = -PdV = -P_1 V_1 \frac{dV}{V} = P_1 V_1 \frac{dP}{P} \quad \text{avec } V_1 = V \text{ du solide}$$

$$W = P_1 V \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = P_1 V \text{Log} \frac{P_2}{P_1} \quad \text{A.N : } \boxed{W = 10^5 \cdot 10^{-3} \text{Log} 100 = 461 \text{ Joules}}$$

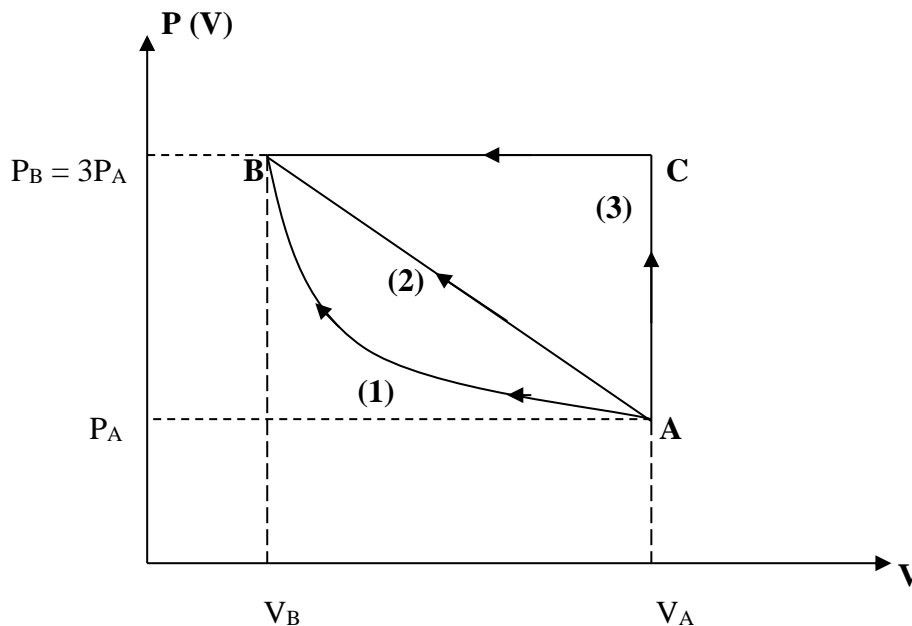
$$\boxed{\frac{W(\text{solide})}{W(\text{gaz})} = 10^{-3} = 1\text{‰}}$$

Le travail reçu par le solide est négligeable devant celui reçu par le gaz.

Exercice 7 : Oxygène \longrightarrow Gaz parfait diatomique (n= 2 moles)

Trois chemins distincts
A (P_A, V_A, T_A) \longrightarrow B ($P_B = 3P_A, V_B, T_B = T_A$)

- a) Chemin A1B \rightarrow Transformation isotherme
- b) Chemin A2B \rightarrow Droite reliant A et B
- c) Chemin A3B \rightarrow Isochore AC + Isobare CB



2) W_1 ? Transformation isotherme, chemin A1B : $PV = 2RT_A \Rightarrow P = \frac{2RT_A}{V}$:

$$\delta W = -PdV = -2RT_A \frac{dV}{V} \Rightarrow W = -2RT_A \text{Log} \frac{V_B}{V_A} \quad \text{avec } P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow P_A V_A = 3P_A V_B$$

$$\Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{W_1 = 2RT_A \text{Log} 3 = 5484,3 \text{ Joules}}$$

W_2 ? Chemin A2B, droite d'équation : $P = aV + b$

$$\text{Etat A : } P_A = aV_A + b \quad (1)$$

$$\text{Etat B : } 3P_A = aV_B + b \quad (2) \quad (V_A = 3V_B)$$

On obtient alors :

$$a = \frac{2P_A}{V_B - V_A} = -\frac{P_A}{V_B} \text{ et } b = 4P_A$$

\Rightarrow

$$P(V) = -\frac{P_A}{V_B}V + 4P_A$$

$$\delta W = -PdV = \frac{P_A}{V_B}VdV - 4P_AdV \Rightarrow W_2 = \frac{P_A}{V_B} \left[\frac{V^2}{2} \right]_{V_A}^{V_B} - 4P_A[V_B - V_A]$$

\Rightarrow

$$W_2 = 4P_AV_B = \frac{4}{3}P_AV_A = \frac{8}{3}RT_A = 6656 \text{ Joules}$$

W_3 ? Chemin A3B, échauffement isochore + refroidissement isobare.

$$W_3 = W_3' + W_3'' = W_3' \text{ car } W_3'' = 0 (\text{ISOCHORE})$$

$$\text{Isobare : } P = P_B = 3P_A \Rightarrow \delta W = -3P_AdV \Rightarrow W_3 = -3P_A(V_B - V_A) \text{ avec : } V_A = 3V_B$$

\Rightarrow

$$W_3 = 6P_AV_B = 2P_AV_A = 4RT_A = 9984 \text{ Joules}$$

Conclusion : $W_1 \neq W_2 \neq W_3 \Rightarrow$ Le travail dépend du chemin suivi.

Exercice 8 :

$$\text{Gaz diatomique CO} \rightarrow C_V = A_0 - \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T^2}$$

$$1/ V = C^{te} \Rightarrow \delta Q = mC_V dT \text{ et on a une mole de CO : } m = M = 12 + 16 = 28 \text{ g}$$

$$\delta Q = MC_V dT = M \left(A_0 - \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T^2} \right) dT$$

$$\Rightarrow Q = M \left[A_0(T_2 - T_1) - A_1 \log \frac{T_2}{T_1} + A_2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right]$$

A.N :

$$M = 28 \text{ g ; } A_0 = 1,41 \text{ J/}^\circ\text{K.g ; } A_1 = 492 \text{ J/g ; } A_2 = 16.10^4 \text{ J.}^\circ\text{K/g ; } T_1 = 300,15^\circ\text{K ; } T_2 = 400,15^\circ\text{K}$$

$$Q = 3718 \text{ Joules}$$

2/ Capacité thermique massique moyenne $\overline{C_V}$:

$$\overline{\delta Q} = M \overline{C_V} dT \Rightarrow \overline{Q} = M \overline{C_V} (T_2 - T_1) \Rightarrow \overline{C_V} = \frac{\overline{Q}}{M(T_2 - T_1)} = 1,33 \text{ Joules/}^\circ\text{K.g}$$

	TRAVAUX DIRIGÉS MODULE THERMODYNAMIQUE Série 3 d'exercices et solutions 2020/2021	
--	--	--

Exercice 1 : Cycle de transformations.

L'état initial d'une mole de gaz parfait est caractérisé par $P_0 = 2.10^5$ Pa, $V_0 = 14$ l. On fait subir successivement à ce gaz les transformations réversibles suivantes :

- une détente isobare qui double son volume ;
- une compression isotherme qui le ramène à son volume initial ;
- un refroidissement isochore qui le ramène à l'état initial.

- 1- À quelle température s'effectue la compression isotherme ? En déduire la pression maximale atteinte.
- 2- Représenter le cycle de transformations dans le diagramme (P, V).
- 3- Calculer les travaux et transferts thermiques échangés par le système au cours du cycle, soient W_1 , W_2 , W_3 , Q_1 , Q_2 et Q_3 en fonction de P_0 , V_0 et $\gamma = C_p/C_v = 1,4$ (supposé constant dans le domaine de températures étudié).
- 4- Vérifier que $\Delta U = 0$ pour le cycle.

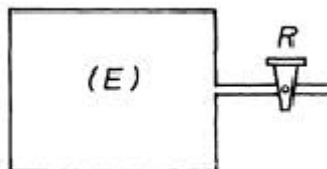
Exercice 2 : Transformation adiabatique.

Un gaz parfait diatomique subit une compression adiabatique, le faisant passer de l'état défini par la pression P_1 et le volume V_1 à l'état défini par la pression $P_2 = 2 P_1$ et le volume V_2 . Calculer le travail échangé par le gaz et le milieu extérieur en fonction de P_1 , V_1 et γ .

Données : $P_1 = 1$ bar, $V_1 = 1$ dm³ et $\gamma = 1,4$.

Exercice 3 : Détente d'un gaz dans le vide.

L'enceinte (E), adiabatique et de volume constant V, est initialement vide. On ouvre le robinet R, et le gaz de l'atmosphère extérieure, de pression constante P, vient remplir l'enceinte (E) jusqu'à ce que la pression y soit égale à P. Calculer l'énergie interne U du gaz de l'enceinte dans l'état final en fonction de son énergie interne U_0 , de la pression P et du volume V_0 qu'il avait initialement dans l'atmosphère.



Exercice 4 : Détente de Joule-Gay Lussac.

Un gaz vérifiant l'équation de Van der Waals, possède l'énergie interne :

$$U = n C_{v,m} T - n^2 a/V + U_0$$

n représente la quantité de matière, a est une constante caractéristique du gaz, $C_{v,m}$ est la capacité thermique molaire à volume constant, supposée indépendante de T dans le domaine de température considéré et U_0 est une constante additive (l'énergie interne, comme l'énergie potentielle d'interaction entre particules, est définie à une constante additive près).

Initialement, ce gaz se trouve dans les conditions suivantes : $P_1 = 10^5$ Pa (très proche de la pression atmosphérique) et $T_1 = 293$ K. Au cours de la détente Joule-Gay Lussac, le volume du gaz double. Calculer la variation de température ΔT correspondante.

On donne : $C_{v,m} = 5R/2$; $a = 0,14$ J.m³.mol⁻².

Exercice 5 : Calculer dans chaque phase d'un cycle de Carnot d'une mole de gaz parfait,

- a) le travail et la chaleur échangés avec le milieu extérieur
- b) la variation d'entropie
- c) montrer que $V_A/V_D = V_B/V_C$
- d) calculer la variation totale d'entropie au cours du cycle, conclusion

Exercice 6 : Un cycle de Carnot d'un gaz parfait diatomique comporte deux états extrêmes caractérisés par les valeurs suivantes des variables :

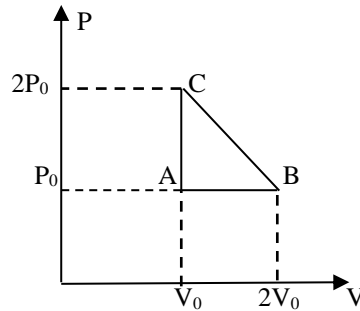
A : $P_A = 1 \text{ bar}$ $T_A = 20^\circ\text{C}$

C : $P_C = 10 \text{ bar}$ $T_C = 250^\circ\text{C}$ et $V_C = 1 \text{ litre}$

- Tracer l'allure du cycle dans un diagramme (P, V), puis dans un diagramme (T, S).
- déterminer les coordonnées des points B et D du cycle.
- calculer les chaleurs Q_2 et Q_1 et le travail W.

Exercice 7 : On considère le cycle triangulaire réversible ci-dessous décrit par un gaz parfait.

- Dans quel sens ce cycle doit-il être parcouru pour que le fonctionnement soit de type moteur ?
- Calculer le rendement en fonction de $\gamma = C_P/C_V$ supposé constant.
(Application numérique : $\gamma = 1,4$).



Exercice 8 : Un cycle de Brayton est formé de deux adiabatiques et de deux isobares alternées de la façon suivante :

- compression adiabatique de l'état A ($V_A, P_A = P_1$) à l'état B ($V_B, P_B = P_2$),
- échauffement isobare de l'état B à l'état C ($V_C, P_C = P_2$),
- détente adiabatique de l'état C à l'état D ($V_D, P_D = P_1$),
- refroidissement isobare de l'état D à l'état A.

Le cycle est supposé réversible, il est décrit dans le sens moteur par un gaz parfait. Pour ce gaz parfait, γ est supposé constant. On pose $a = P_2/P_1$.

1°) Tracer l'allure du cycle dans un diagramme (P, V), puis dans un diagramme (T, S).

2°) Calculer le rendement en fonction de a et γ . (Application numérique : $a = 8$; $\gamma = 1,4$).

Exercice 9 : Un cycle de Stirling est formé de deux isothermes et de deux isochores alternées de la façon suivante :

- compression isotherme de l'état A (V_1, P_A) à l'état B (V_2, P_B),
- échauffement isochore de l'état B à l'état C (V_2, P_C),
- détente isotherme de l'état C à l'état D (V_1, P_D),
- refroidissement isochore de l'état D à l'état A.

Le cycle est supposé réversible ; il est décrit dans le sens moteur par un gaz parfait. Pour ce gaz parfait γ est supposé constant.

1°) Tracer l'allure du cycle dans un diagramme (P, V), puis dans un diagramme (T, S).

2°) Etablir en fonction des températures T_1 et T_2 , du taux de compression $a = V_2/V_1$, de n , R et γ , les expressions :

- de la quantité de chaleur Q_1 reçue par le système au cours d'un cycle moteur réversible ;
- de la quantité de chaleur Q_2 cédée par le système au cours d'un cycle moteur réversible ;
- du rendement thermodynamique de ce cycle.

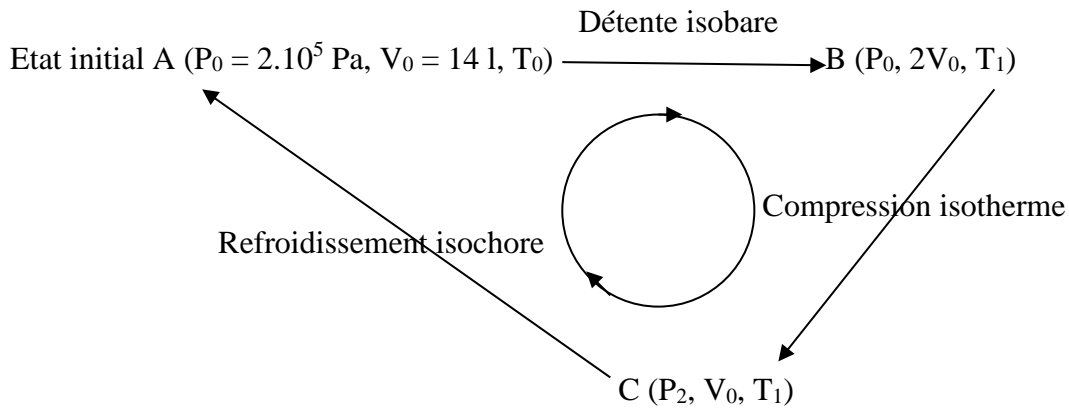
3°) Quelle est l'expression du rendement du cycle de Carnot réversible correspondant (c'est à dire utilisant des sources dont les températures sont égales aux températures extrêmes précédentes) ?

4°) Comparer les deux rendements et montrer que le sens de l'inégalité est indépendant des valeurs numériques des paramètres.

-----Fin de l'énoncé des exercices de la série 3

T.D. THERMODYNAMIQUE
SOLUTION DE LA SERIE 3
FILIERE SM & SMIA

Exercice 1 : On considère une mole de gaz parfait ($n = 1$)



1°/ T_1 ? de l'isotherme : Etat B $\Rightarrow 2P_0V_0 = RT_0 \Rightarrow T_1 = 2P_0V_0/R$

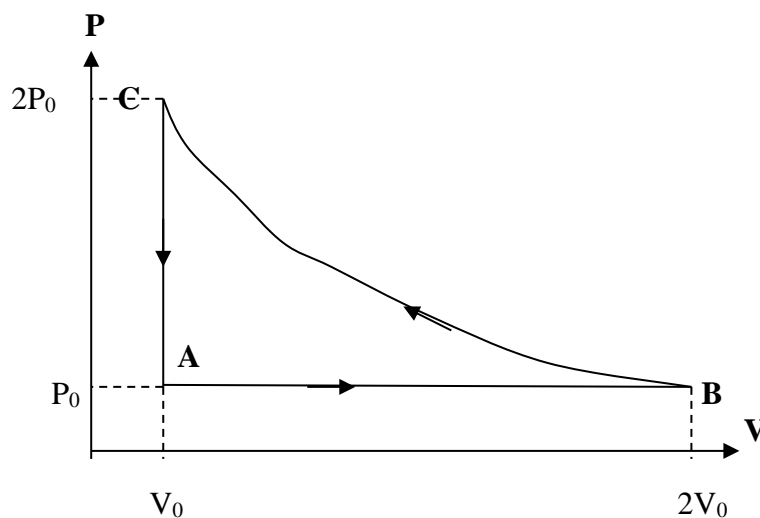
A.N.: $T_1 = 673^\circ\text{K}$

Remarque : $RT_1 = 2P_0V_0 = 2RT_0 \Rightarrow T_1 = 2T_0 \Rightarrow T_0 = 336,5^\circ\text{K}$

Lors du refroidissement isochore, la pression diminue et donc la pression maximale est celle atteinte à la fin de la compression isotherme (P_2).

Isotherme $\Rightarrow PV = C^{\text{te}} \Rightarrow P_2V_0 = 2P_0V_0 \Rightarrow P_2 = 2P_0 = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2°/



3°/ Travaux et transfert thermiques échangés par le système, au cours du cycle.

W₁? W₁ = W_A^B AB = Isobare P = P₀

$$W_1 = -P_0(2V_0 - V_0) = -P_0V_0 \longrightarrow \boxed{W_1 = -2800 \text{ Joules}}$$

W₂? W₂ = W_B^C BC Isotherme: PV = RT₁

$$\delta W = -PdV = -RT_1 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_2 = -2RT_0 \log \frac{V_C}{V_B} = -2RT_0 \log \frac{V_0}{2V_0} = 2RT_0 \log 2$$

$$\underline{\text{A.N.:}} \quad \boxed{W_2 = 3881 \text{ Joules}}$$

W₃? W₃ = W_C^A avec CA Isochore $\Rightarrow \boxed{W_3 = 0}$

Q₁? Q₁ = Q_A^B AB Isobare : $\delta Q = C_p dT \Rightarrow Q_1 = C_p(T_1 - T_0) = C_p.T_0$

$$\text{On a: } C_p - C_v = R \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{R}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ et } C_p = \gamma C_v = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{\gamma RT_0}{\gamma - 1} \quad \underline{\text{A.N.:}} \quad \boxed{Q_1 = 9799 \text{ Joules}}$$

Q₂? Q₂ = Q_B^C BC Isotherme $\longrightarrow PV = C^{\text{te}}$

$$\delta Q = PdV = -\delta W \Rightarrow \boxed{Q_2 = -W_2 = -3881 \text{ Joules}}$$

Q₃? Q₃ = Q_C^A CA Isochore : $\delta Q = C_v dT \Rightarrow Q_3 = C_v(T_A - T_C)$

$$Q_3 = C_v(T_0 - 2T_0) = -T_0.C_v = -\frac{RT_0}{\gamma - 1} = -\frac{P_0V_0}{\gamma - 1}$$

$$\underline{\text{A.N.:}} \quad \boxed{Q_3 = -7000 \text{ Joules}}$$

$$4^\circ / W = W_1 + W_2 + W_3 = -2800 + 3881 + 0 \Rightarrow \boxed{W = 1081 \text{ Joules}}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 9799 - 3881 - 7000 \Rightarrow \boxed{Q = -1082 \text{ Joules}}$$

$$\Rightarrow \Delta U = W + Q \cong 0$$

→ Erreurs d'imprécision sur les calculs

U est une fonction d'état, dU est DTE. ΔU pour un cycle doit être nulle.

Exercice 2:

A (P₁, V₁, T₁) $\xrightarrow{\text{Compression adiabatique}}$ B (P₂ = 2P₁, V₂, T₂)

$$\delta W = -PdV \text{ avec } P = \frac{C}{V^\gamma} \Rightarrow \delta W = -C \frac{dV}{V^\gamma} \Rightarrow W = -C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -C \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$W = -\frac{C}{1-\gamma} (V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}) \text{ avec } C = P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{\gamma-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) \text{ sachant que } P_2 = 2P_1 \text{ on a :}$$

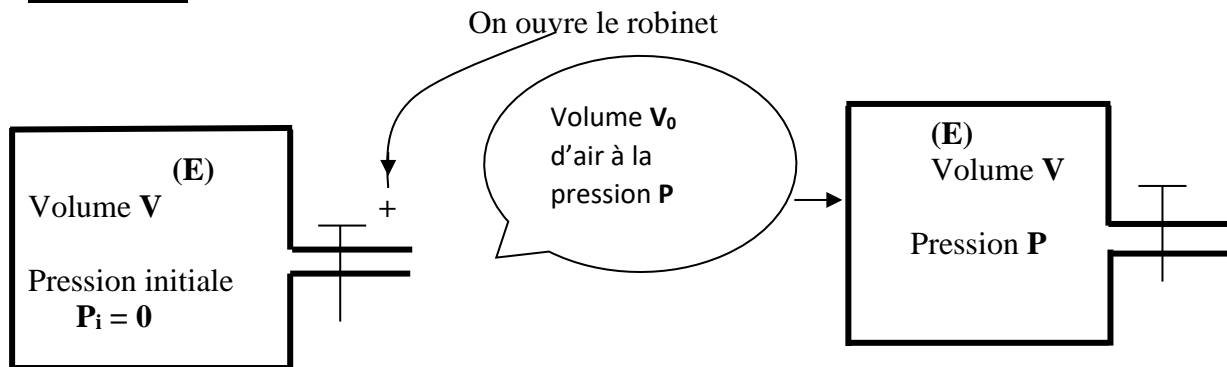
$$P_1 V_1^\gamma = 2P_1 V_2^\gamma \Rightarrow V_1^\gamma = 2V_2^\gamma \Rightarrow V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1 \text{ d'où :}$$

$$W = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left[\left(2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

A.N.:

$$W = 54,75 \text{ Joules}$$

Exercice 3 :



Energie interne U du gaz de l'enceinte (E) à parois adiabatiques : $U = f(U_0, V_0, P)$

$$\Delta U = W + Q = W \text{ avec :}$$

$$W = W_1 + W_2$$

Travail du gaz dans l'enceinte

(Détente dans le vide : $W_1 = 0$)

Travail du gaz à l'extérieur de l'enceinte

$$(W_2 = -P \int_{V_0}^0 dV = PV_0)$$

$$\Delta U = U - U_0 = PV_0$$

\Rightarrow

$$U = U_0 + PV_0$$

Exercice 4 : Détente de Joule-Gay Lussac d'un gaz de Van der Waals :

$$\rightarrow U = nC_{V,m}T - n^2 \frac{a}{V} + U_0$$

Détente de Joule-Gay Lussac

$$(P_1 = 10^5 \text{ Pa}, V_1, T_1 = 293^\circ \text{ K}) \longrightarrow (P_2, V_2 = 2V_1, T_2)$$

Lors d'une détente de Joule Gay Lussac $dU = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 = U_2 - U_1$ avec :

$$U_2 = nC_{V,m}T_2 - n^2 \frac{a}{V_2} + U_0 \text{ et } U_1 = nC_{V,m}T_1 - n^2 \frac{a}{V_1} + U_0. \text{ Donc :}$$

$$U_2 - U_1 = nC_{V,m}\Delta T - n^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = 0 \text{ On a : } V_2 = 2V_1 \Rightarrow$$

$$nC_{v,m}\Delta T = n^2a\left(\frac{1}{2V_1} - \frac{1}{V_1}\right) = -\frac{n^2a}{2V_1} \Rightarrow \Delta T = -\frac{na}{2C_{v,m}.V_1}$$

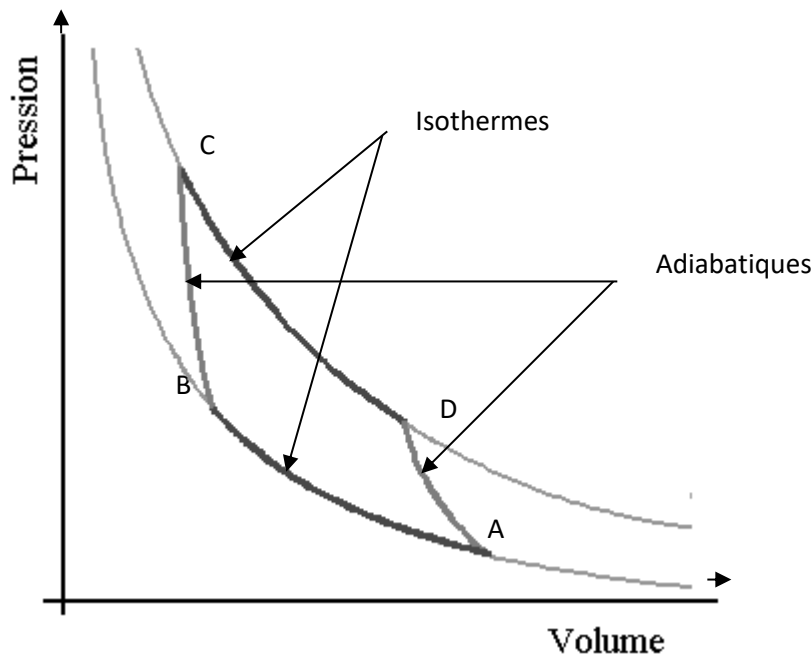
$$V_1 = \left(\frac{nRT_1}{P_1 + \frac{n^2a}{V_1^2}} \right) + nb \cong \frac{nRT_1}{P_1} \Rightarrow \boxed{\Delta T = -\frac{a.P_1}{2C_{v,m}.RT_1}}$$

A.N:

$$\boxed{\Delta T = -0,14^\circ K}$$

Exercice 5 : Cycle ABCDA de Carnot avec :

AB = Compression isotherme, BC = Compression Adiabatique, CD = Détente isotherme et DA détente adiabatique.



Cycle de Carnot dans un diagramme (P, V)

a°) 1 mole de gaz parfait : $PV = RT$

► Transformation AB (Compression Isotherme) : $PV = RT_2$

$$W_A^B = ? : \delta W = -PdV = -RT_2 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_A^B = -RT_2 \text{Log} \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_A^B = ? : \delta Q = mC_v dT + PdV = PdV \Rightarrow Q_A^B = -W_A^B = RT_2 \text{Log} \frac{V_B}{V_A}$$

► Transformation BC (Compression adiabatique) : $Q_B^C = 0$

$$W_B^C ? \text{ On a : } PV^\gamma = P_C V_C^\gamma = P_B V_B^\gamma \Rightarrow P = \frac{P_B V_B^\gamma}{V^\gamma}$$

$$\delta W = -PdV = -P_B V_B^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} \Rightarrow W_B^C = -P_B V_B^\gamma \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$\Rightarrow W_B^C = \frac{1}{\gamma-1} [P_C V_C - P_B V_B] = \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2)$$

► Transformation CD (Détente isotherme) : $PV = RT_1 \Rightarrow P = RT_1/V$

$$W_C^D = ? : \delta W = -PdV = -RT_1 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_C^D = -RT_1 \text{Log} \frac{V_D}{V_C}$$

$$Q_C^D ? : \delta Q = PdV = -\delta W \Rightarrow Q_C^D = -W_C^D = RT_1 \text{Log} \frac{V_D}{V_C}$$

► Transformation DA (Détente adiabatique) : $Q_D^A = 0$

$$W_D^A ? : \delta W = -PdV \text{ avec : } P = \frac{P_A V_A^\gamma}{V^\gamma}$$

$$\Rightarrow \delta W = -P_A V_A^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} \Rightarrow W_D^A = \frac{1}{\gamma-1} (P_A V_A - P_D V_D) = \frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$$

$$\text{b°) La variation d'entropie : } dS = \frac{\delta Q}{T}$$

AB = Compression isotherme T_2

$$dS = \frac{\delta Q}{T_2} \Rightarrow \Delta S_A^B = \frac{Q_A^B}{T_2} = R \text{Log} \frac{V_B}{V_A}$$

BC = Compression adiabatique : $Q_B^C = 0 \Rightarrow \Delta S_B^C = 0$

CD = Détente isotherme T_1 :

$$dS = \frac{\delta Q}{T_1} \Rightarrow \Delta S_C^D = \frac{Q_C^D}{T_1} = R \text{Log} \frac{V_D}{V_C}$$

DA = Détente adiabatique : $Q_D^A = 0 \Rightarrow \Delta S_D^A = 0$

C°) On montre que $\frac{V_A}{V_D} = \frac{V_B}{V_C}$

Adiabatiques BC et DA $\rightarrow TV^{\gamma-1} = C^{te}$

$$\text{Adiab. BC} \rightarrow T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Adiab. DA} \rightarrow T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \frac{V_A}{V_D} = \frac{V_B}{V_C}$$

d°) ΔS du cycle :

$$\Delta S = \Delta S_A^B + \Delta S_B^C + \Delta S_C^D + \Delta S_D^A = \Delta S_A^B + \Delta S_C^D$$

$$\Delta S = R \log \frac{V_B}{V_A} + R \log \frac{V_D}{V_C} \text{ avec } \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \Delta S = 0$$

Résultat attendu car S est une fonction d'état ; dS est une DTE \Rightarrow sa variation ΔS , ne dépend pas du chemin suivi. Elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final et donc pour un cycle $\Delta S = 0$

Exercice 6 : Cycle de Carnot d'un gaz diatomique.

$$A (P_A = 1 \text{ atm}, T_A = 20^\circ\text{C}) \quad T_A = T_2$$

$$C (P_C = 10 \text{ atm}, T_C = 250^\circ\text{C}, V_C = 1 \text{ l}) \quad T_C = T_1$$

a) ► Coordonnées des points B et D

BC = Compression adiabatique : $TV^{\gamma-1} = c^{te}$

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_B = V_C \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\text{Gaz parfait diatomique : } C_P = \frac{7}{2} nR \text{ et } C_V = \frac{5}{2} nR \Rightarrow \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$V_B = \left(\frac{523}{293} \right)^{\frac{1}{0,4}} = 4,26 \text{ l}$$

$$P_B ? P_B V_B = nRT_2 \text{ et } P_A V_A = nRT_2 \Rightarrow P_B = \left(\frac{V_A}{V_B} \right) P_A$$

$$V_A ? P_A V_A = nRT_2 \text{ et } P_C V_C = nRT_1 \Rightarrow V_A = \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \cdot \left(\frac{P_C}{P_A} \right) \cdot V_C = \frac{293.10.1}{523.1} = 5,60l$$

$$\Rightarrow P_B = \left(\frac{V_A}{V_B} \right) P_A = 1,32atm$$

► Coordonnées du point D

$$\text{On a } \frac{V_A}{V_D} = \frac{V_B}{V_C} \Rightarrow V_D = \left(\frac{V_C}{V_B} \right) V_A = 1,31atm$$

$$P_D ? P_D V_D = nRT_1 \text{ et } P_C V_C = nRT_1 \Rightarrow P_D = \left(\frac{V_C}{V_D} \right) P_C = 7,63atm$$

b) Calcul de Q_2 , Q_1 et du travail W (voir exercice 3)

$$Q_2 = nRT_2 \text{Log} \frac{V_B}{V_A} = P_A V_A \text{Log} \frac{V_B}{V_A} = -153,16 \text{Joules}$$

$$Q_1 = nRT_1 \text{Log} \frac{V_D}{V_C} = P_C V_C \text{Log} \frac{V_D}{V_C} = 270,0 \text{Joules}$$

$$\text{Travail } W : W = W_A^B + W_B^C + W_C^D + W_D^A$$

$$W_A^B = -P_A V_A \text{Log} \frac{V_B}{V_A} = 153,16 \text{Joules}$$

$$W_B^C = \frac{1}{\gamma - 1} (P_C V_C - P_B V_B) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_2)$$

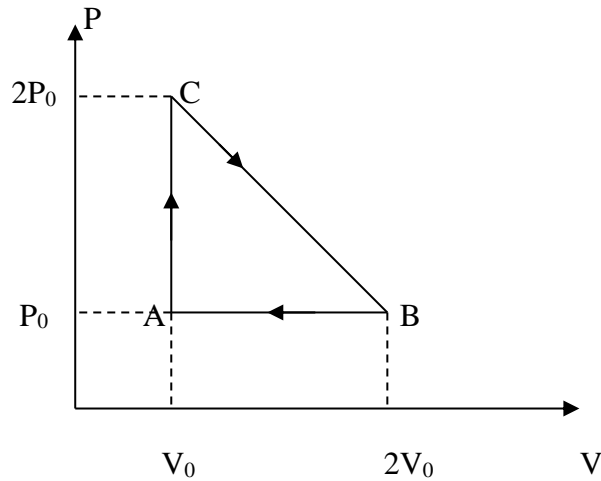
$$W_C^D = -P_C V_C \text{Log} \frac{V_D}{V_C} = -270,0 \text{Joules}$$

$$W_D^A = \frac{1}{\gamma - 1} (P_A V_A - P_D V_D) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

$$W = -P_A V_A \text{Log} \frac{V_B}{V_A} - P_C V_C \text{Log} \frac{V_D}{V_C} \text{ avec } \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

$$\text{On obtient alors : } W = (P_C V_C - P_A V_A) \text{Log} \frac{V_B}{V_A} = -116,84 \text{Joules}$$

Exercice 7 : Cycle triangulaire réversible :



1°) Le cycle doit être décrit dans le sens des aiguilles d'une montre pour être de type moteur (voir figure).

2°) Rendement de ce moteur en fonction de $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

$$\rho = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{reçue}}}$$

Cycle ACB.

$$W ? W = W_A^C + W_C^B + W_B^A = W_C^B + W_B^A$$

$$W_C^B ? \text{Droite dans le plan (P,V) : } P(V) = aV + b \rightarrow \begin{cases} \text{point C} \rightarrow 2P_0 = aV_0 + b \dots (1) \\ \text{point B} \rightarrow P_0 = 2aV_0 + b \dots (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow a = -\frac{P_0}{V_0} \text{ et } (1) \Rightarrow b = 3P_0$$

$$\text{On a alors } P = -\frac{P_0}{V_0}V + 3P_0 \text{ et donc : } \delta W = -PdV = -\left(-\frac{P_0}{V_0}V + 3P_0\right)dV$$

$$W_C^B = -\int_{V_0}^{2V_0} \left(-\frac{P_0}{V_0}V + 3P_0\right)dV = -\frac{3}{2}P_0V_0$$

$$W_B^A ? \text{BA isobare : } P = P_0$$

$$\delta W = -P_0dV \Rightarrow W_B^A = -P_0(V_A - V_B) = P_0V_0$$

$$W = -\frac{3}{2}P_0V_0 + P_0V_0 = -\frac{P_0V_0}{2}$$

$$Q_{\text{Cycle}} ? Q_{\text{Cycle}} = Q_A^C + Q_C^B + Q_B^A$$

Premier Principe : $Q_{Cycle} + W_{Cycle} = 0 \Rightarrow Q_{Cycle} = -W = \frac{P_0 V_0}{2}$

Q_A^C ? AC isochore $\Rightarrow \delta Q = C_V dT \Rightarrow Q_A^C = C_V (T_C - T_A) = \frac{C_V}{nR} (P_0 V_0) > 0$

Q_B^A ? BA isobare $\Rightarrow \delta Q = C_P dT \Rightarrow Q_B^A = C_P (T_A - T_B) = \frac{C_P}{nR} (-P_0 V_0) < 0$

Q_C^B ? $Q_C^B = Q_{Cycle} - Q_A^C - Q_B^A \Rightarrow Q_C^B = \frac{3}{2} P_0 V_0 > 0$

$Q_{reçu}$? $Q_{reçu} = Q_A^C + Q_C^B = \frac{C_V}{nR} P_0 V_0 + \frac{3}{2} P_0 V_0$

Rendement ρ ? : $\rho = -\frac{W}{Q_{reçu}} = \frac{\frac{P_0 V_0}{2}}{P_0 V_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{C_V}{nR} \right)}$

Tout calcul fait, on trouve : $\rho = \frac{\gamma-1}{3\gamma-1}$ A.N : $\gamma = 1,4 \Rightarrow \rho = 12,5\%$

Exercice 8 : Cycle de Brayton

1)

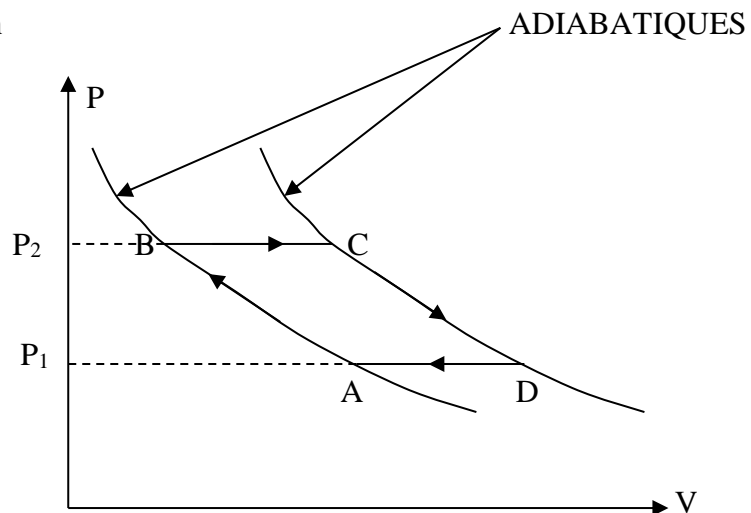


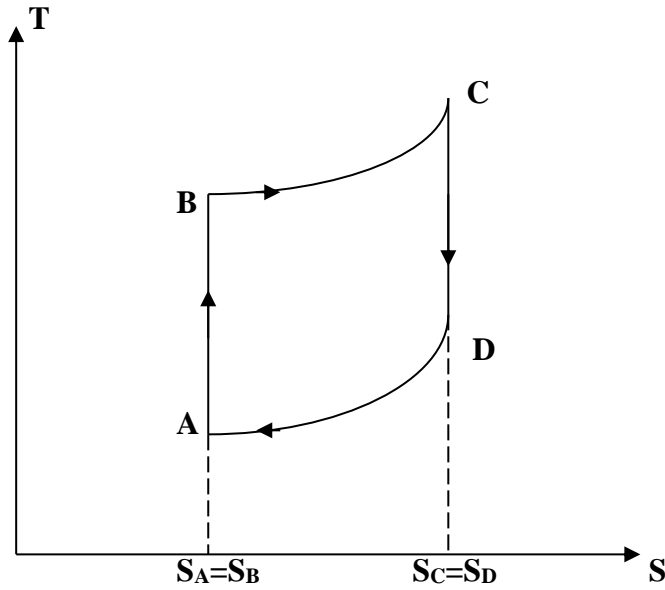
Diagramme (T,S)

Adiabatique $\Rightarrow \delta Q = 0 \Rightarrow dS = \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow S = C^{te} \Rightarrow \Delta S = 0$

De A à B, $T \nearrow$ (compression adiabatique) et de C à D, $T \searrow$ (détente adiabatique)

Isobare $\Rightarrow \delta Q = C_P dT \Rightarrow dS = \frac{\delta Q}{T} = C_P \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dS}{C_P} \Rightarrow \boxed{T = K e^{\frac{S}{C_P}}}$

De B à C, $T \nearrow \Rightarrow S \nearrow$ et de D à A, $T \searrow \Rightarrow S \searrow$



2) Rendement du cycle de Brayton :

$\rho = - \frac{W}{Q_{\text{reçu}}}$ avec $Q_{\text{reçu}} = Q_B^C$. On doit donc calculer Q_B^C et W .

BC est une transformation isobare. $\delta Q = C_p dT$ et donc : $Q_B^C = C_p (T_C - T_B) = \frac{C_p \cdot P_2}{nR} (V_C - V_B)$

$W_{\text{cycle}} = W$?. On a $\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow W = -Q$ avec $Q = Q_B^C + Q_D^A$

Q_D^A ?. DA est une transformation isobare $P = P_1$:

$$Q_D^A = C_p (T_A - T_D) = \frac{C_p \cdot P_1}{nR} (V_A - V_D)$$

$$\Rightarrow W = - \frac{C_p \cdot P_2}{nR} (V_C - V_B) - \frac{C_p \cdot P_1}{nR} (V_A - V_D)$$

$$\text{le rendement est : } \rho = - \frac{W}{Q_B^C} = 1 + \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \left(\frac{V_A - V_D}{V_C - V_B} \right)$$

A partir des adiabatiques AB et CD ($PV^\gamma = C^{te}$) on montre que :

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} = \frac{V_D - V_A}{V_C - V_B} = - \frac{V_A - V_D}{V_C - V_B}$$

$$\rho = - \frac{W}{Q_B^C} = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \left(\frac{V_A}{V_B} \right) \text{ avec : } \left(\frac{V_A}{V_B} \right) = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\rho = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - (a)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\text{A.N : } a = 8 ; \gamma = 1,4 \Rightarrow \rho = 0,448 = 44,8\%$$

Exercice 9 : Cycle de Stirling.

1°/ Diagramme (P, V)

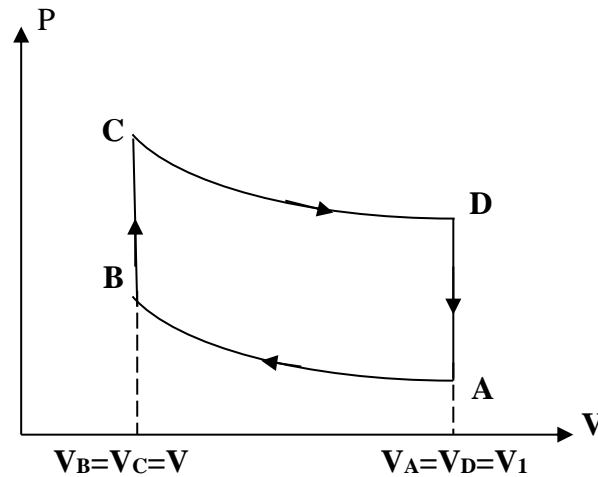
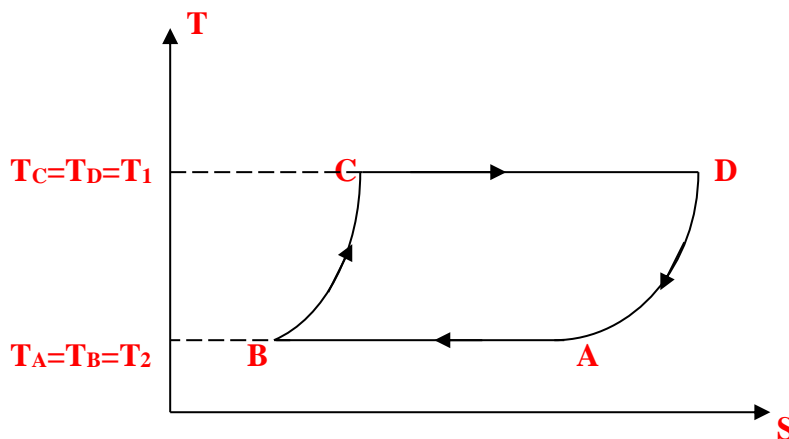


Diagramme (T, S)

Isotherme $T = \text{Cte} \Rightarrow \delta Q = C_v dT + PdV = PdV$ et donc $dS = \frac{P}{T} dV = nR \frac{dV}{V}$
 $\Rightarrow S = nR \log V + \text{Cte}$ ($V \searrow \Rightarrow S \searrow$ et $V \nearrow \Rightarrow S \nearrow$)

Isochore: $\delta Q = C_v dT \Rightarrow dS = C_v \frac{dT}{T} \Rightarrow S = C_v \log T + \text{Cte} \Rightarrow T = K \exp\left(\frac{S}{C_v}\right)$
 avec $K = \text{Cte} > 0$ ($T \searrow \Rightarrow S \searrow$ et $T \nearrow \Rightarrow S \nearrow$)



2°/ a- $Q_1 = Q_B^C + Q_C^D$

Q_B^C ? BC isochore ($V = \text{Cte}$); $\delta Q = C_v dT \Rightarrow Q_B^C = C_v (T_C - T_B) = C_v (T_1 - T_2)$

On montre que: $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$ et donc :

$$Q_B^C = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2)$$

Q_C^D ? CD isotherme $T = \text{Cte} = T_1$ et donc : $\delta Q = PdV = -\delta W = nRT_1 \frac{dV}{V}$

$$Q_C^D = nRT_1 \text{Log} \left(\frac{V_D}{V_C} \right) = nRT_1 \text{Log} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

\Rightarrow

$$Q_1 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2) - nRT_1 \text{Log} a$$

b- $Q_2 = Q_A^B + Q_D^A$

AB est une isotherme : $T = T_2 \Rightarrow Q_A^B = nRT_2 \text{Log} \frac{V_B}{V_A} = nRT_2 \text{Log} \frac{V_2}{V_1} = nRT_2 \text{Log} a$

Q_D^A ? DA est une isochore : $Q_D^A = C_V (T_A - T_D) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$ et donc :

$$Q_2 = -\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2) + nRT_2 \text{Log} a$$

c- Rendement thermodynamique du cycle :

$$\rho = -\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \quad (W + Q_1 + Q_2 = 0)$$

$$\rho = 1 - \frac{\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2) - nRT_2 \text{Log} a}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2) - nRT_1 \text{Log} a}$$

3°/ Cycle de Carnot fonctionnant entre T_1 et T_2 : $\rho_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

4°/ Comparaison de ρ et ρ_C ? $\rho - \rho_C$?

$$\rho - \rho_C = \frac{T_2}{T_1} \left[1 - \frac{\frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) - nR \text{Ln} a}{\frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - nR \text{Ln} a} \right]$$

$$\Rightarrow \rho - \rho_c = \frac{T_2}{T_1} \left[1 - \frac{\frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) - nRLna}{\frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) - nRLna} \right]$$

$$T_1 > T_2 \text{ et donc : } \frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) > \frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right)$$

$$\frac{\frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) - nRLna}{\frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) - nRLna} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{\frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) - nRLna}{\frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) - nRLna} < 0$$

$$\Rightarrow \rho - \rho_c < 0 \Rightarrow \rho < \rho_c \text{ ceci } \forall T_1, T_2 \text{ et } a = \frac{V_2}{V_1}$$

-----Fin solution série 3